N° D'ORDRE : AO 7205

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX - MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Hamid SAADAT

ETUDE DES VIBRATIONS D'UNE PLAQUE MINCE COUPLEE AVEC UN FLUIDE

Soutenue le 30 mai 1972 devant la Commission d'Examen

MM. P. CASAL — Président

R. BOUDET
P. FILIPPI
Y. JULLIEN
Th. VOGEL
— Examinateurs

N° D'ORDRE : AO 7205

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

AIX - MARSEILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Hamid SAADAT

ETUDE DES VIBRATIONS D'UNE PLAQUE MINCE COUPLEE AVEC UN FLUIDE

Soutenue le 30 mai 1972 devant la Commission d'Examen

MM. P. CASAL — Président

R. BOUDET
P. FILIPPI
Y. JULLIEN
Th. VOGEL
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

FACULTE DES SCIENCES DE MARSEILLE

Doyens honoraires : MM. MARCHAUD, CORROY, CHOUX.

Professeurs honoraires : MM. J. MARCHAUD, C. PETIT, J. BOSLER, A. TIAN, L. MARGAILLAN, P. BENOIT, H. CABANNES, P. CHOUX, G. LIANDRAT, R. CERIGHELLI, C. CORROY, L. ROYER, P. VINCENSINI, R. MOLINIER, H. PRAT.

Doyen : M. G. BODIOU Assesseur : M. A. GUILLEMONAT.

Secrétaire principal honoraire : M. H. LANFRANCHI.

Conseiller, chef des services administratifs : M. C. MOYNAULT.

PROFESSEURS

MM.	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. ABELOOS	Biologie générale
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	C. JAUSSERAN	Physique expérimentale
	Y. DOUCET	Physique
	JM SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	J. PAILLARD	Psycho-physiologie
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée

G. GOUVERNET	Géologie appliquée
A. VISCONTI	Physique théorique
A. BLANCHARD	Mathématiques générales
M. DUSSARDIER	Physiologie animale
M. PERROT	Physique
P. QUEZEL	Botanique
E. CRAUSSE	Physique (Avignon)
A. JULG	Chimie théorique
S. TAKY (Mme)	Géologie historique
F. TESSIER	Géologie générale
ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques
C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVÉ	Electronique
H. BODOT	Chimie
G. LAPLUYE	Chimie (La Réunion)
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
J.C. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides

PROFESSEURS SANS CHAIRE

R. AMAR	Zoologie
L. DEVEZE	Biologie marine
J. MANDELBROJT	Physique
F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
M. BIZOUARD	Physique
H. CHENOCHE	Mathématiques appliquées
J.P. DAVID	Physique
F. PECAUT (Mme)	Mathématiques (Avignon)
J. HENNEQUIN	Electronique

J.C. MAIRE	Chimie
Y. POIRIER	Physique (La Réunion)
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C. FEUGEAS	Chimie
J. CABANE	Chimie
G. RASIGNI	Physique
S. COMBET	Chimie
R. GARRON	Physique expérimentale
M. CADILHAC	Physique
A. PONS	Biologie végétale
M. SIMON	Physiologie animale
B. MARGELL	Chimie
N. BGO	Mathématiques (La Réunion)
L. LAGARDE (Mlle)	Chimie minérale
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
F. HALBWACHS	Physique (Avignon)
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie

MAITRES DE CONFERENCES

H. PATIN	Chimie
M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
M. GILLET	Physique
J.P. ROGGERO	Chimie (Avignon)
J. CRESP	Biologie animale
G. RAUZY	Mathématiques
L. SARDA	Biochimie
M. BENARROCHE	Physique
H. TACHOIRE	Chimie
C. ROMAN	Physiologie animale
A. GILLET	Mathématiques
E. VINCENT	Chimie
L. VICENTE	Biologie animale
S. MARTINUZZI	Physique
J. MANUCEAU	Mathématiques
R. GUERMEUR	Physique
M. DELAAGE	Biochimie
F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
M. SIRUGUE (Mme)	Physique
H. MERDY	Physique
L. PUJOL	Chimie
A. LAVAGNE	Biologie végétale
J. GIUDICELLI	Biologie animale

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0022

M. FOUGEREAU	Biochimie
G. NOAT	Physiologie végétale
R. BOUDET	Mathématiques
G.R. GIRAUD	Chargé d'enseignement - Mathématiques
G. FARDOUX	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. MORIN	Chargé d'enseignement - Mathématiques
B. BALLET	Chargé d'enseignement - Mathématiques (Avignon)
R. STREIFF	Chimie
J.P. BELAICH	Microbiologie

Je tiens à exprimer ma respectueuse gratitude à M. Th. Vogel, directeur du Centre de Recherches Physiques de Marseille qui m'a réservé le meilleur accueil dans son Laboratoire et dont les critiques et conseils fréquents m'ont été d'une grande utilité dans ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude à MM. P.Cossal et R.Boudet, Professeurs à l'Université de Provence, qui ont accepté de juger mon travail.

Que M. P.Filippi qui a guidé mes recherches et m'a permis à l'issue de discussions de vaincre les nombreuses difficultés tant théoriques qu'expérimentales, trouve ici l'expression de ma reconnaissance amicale.

Que mes remerciements s'adressent aussi à M. Y.Jullien pour ses conseils expérimentés, ses encouragements et l'accueil qu'il m'a constamment réservé, ce qui m'a été très précieux pendant la préparation de ce travail.

Je remercie également Mademoiselle de la Baume, M. Vivoli et M. Devine pour leur aide efficace.

- TABLE DES MATIERES -

RESUME ..... p. 1
ENONCE DU PROBLEME 3

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I .

ENONCE DU PROBLEME 12

CHAPITRE II .

SOLUTION ELEMENTAIRE DU PROBLEME 18
II.1. Transformée de Fourier de (6) et de u. 18
II.2. Calcul de u. 21

CHAPITRE III.

ETUDE DE u A L'ORIGINE, DE SES TROIS DERIVEES PAR RAPPORT A r ET DE SON COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE A L'INFINI. 25

III.1. Expression de u à l'origine et de ses trois premières dérivées par rapport à r à l'origine.... 25
III.2. Comportement asymptotique de u à l'infini. 27
III.3. Remarque. 28

CHAPITRE IV.

CHAMP ACOUSTIQUE, SON COMPORTEMENT A L'INFINI ET SA VALEUR SUR LA PLAQUE. 31

IV.1. Expression du champ acoustique rayonné dans le fluide. 31
IV.2. Comportement asymptotique de Φ à l'infini. 32
IV.3. Expression du champ acoustique sur Σ. 33

CHAPITRE V.

EXPRESSION DES PUISSANCES MOYENNE MISES EN JEU... 34

V.1. Rappel des définitions. 34

V.2. Calcul de puissance totale moyenne admise par le système. 35

V.3. Puissance moyenne dissipée à l'infini dans la plaque.. 35

V.4. Puissance moyenne rayonnée dans la fluide. 36

V.5. Remarque importante. 36

CHAPITRE VI.

EXEMPLES ET CONCLUSION. 41

VI.1. Exemple. 41

VI.2. Conclusion de la première partie. 41

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE VII.

APPROXIMATION DE L'ADMITTANCE DE LA PLAQUE FINIE ... 46

CHAPITRE VIII.

PREMIERE VERIFICATION EXPERIMENTALE :
LOI DE DENSITE DES MODES PROPRES 50

VIII.1. Montage expérimental. 50

VIII.2. Résultats expérimentaux. 52

CHAPITRE IX.

DEUXIEME VERIFICATION EXPERIMENTALE :
DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES..... 60

IX.1. Montage expérimental. 61

IX.2. Résultats expérimentaux. 61

CHAPITRE X.

TROISIEME VERIFICATION EXPERIMENTALE :
INDICE D'AFFAIBLISSEMENT D'UNE CLOISON. 69

CHAPITRE XI.

CONCLUSION GENERALE. 73

ANNEXES

ANNEXE I.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS DE SCHWARZ. 76

1. Comportement asymptotique de Je. 76
2. Comportement asymptotique de He. 77

ANNEXE 2.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE Φ (M) 79

ANNEXE 3. 86

BIBLIOGRAPHIE 87

RESUME.-

L'utilisation de la transformée de Fourier permet d'expliciter la solution formelle du problème en fonction des racines d'un polynôme du 5ème degré. On en déduit les expressions du champ acoustique rayonné par une plaque infinie, des différentes puissances mises en jeu, et la partie réelle de l'admittance du système.
En tenant compte de certaines considérations énergétiques, on obtient une approximation de la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie couplée avec un fluide, qui permet de déterminer sa densité de modes propres et ses fréquences propres à partir des valeurs obtenues pour la plaque dans le vide. L'expérience montre que ces approximations sont très satisfaisantes. Les expressions des différentes puissances mises en jeu nous permettent de tracer des courbes de transparence au son d'une cloison qui sont en bon accord avec les courbes expérimentales de F. Spronck.

INTRODUCTION

1.- ENONCE DU PROBLEME.

Le couplage entre la vibration d'une plaque et un champ acoustique dans un fluide environnant la plaque intervient dans de nombreux problèmes. L'acousticien rencontre ce problème notamment dans l'étude des transducteurs acoustiques, de la transparence au son d'une cloison, du rayonnement ou de l'excitation acoustique d'une structure, etc..

En pratique, le problème se pose de la façon suivante: une plaque de dimensions finies et de forme quelconque sépare deux milieux limités ou non, occupés soit par des fluides identiques, soit par des fluides différents.

Le système est mis en mouvement par des sources de deux origines possibles : sources sonores dans les fluides, excitateurs de vibration sur la plaque. Il s'agit de calculer essentiellement les échanges d'énergie entre les différents composants du système.

Pour formuler ce problème, on écrit l'équation régissant le mouvement de la plaque sous l'effet de la pression acoustique répartie sur la plaque et, si elle existe, d'une force extérieure excitant la plaque. Pour le fluide supposé parfait, et compressible, la propagation du son en régime permanent est régie par l'équation d'Helmotz, avec second membre lorsqu'une source sonore est présente. On adjoint à ces deux équations, le système d'équations décrivant le comportement des surfaces limitant le ou les milieux fluides. Ces systèmes d'équations comportent :

a) Deux équations traduisant les contraintes imposées au bord de la plaque;

b) Une équation décrivant le couplage: il s'agit de la condition de continuité de la vitesse vibratoire de la plaque et de la vitesse normale du fluide sur la plaque;

c) Une équation décrivant les propriétés acoustiques des autres surfaces limitants les fluides; s'ils s'étendent à l'infini une condition de Sommerfeld sera nécessaire pour assurer la présence d'ondes uniquement divergentes.

2.- UNE METHODE GENERALE DE RESOLUTION : L'ETABLISSEMENT D'EQUATIONS INTEGRALES.

Une méthode générale pour résoudre ce type de problème consisterait à écrire un système d'équations intégrales et à les résoudre numériquement, car pour un tel système couplé, il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique par exemple par

séparation des variables. Pour aboutir au système d'équations intégrales, on utilise la méthode des potentiels de couches. Voyons donc comment ramener la résolution de ce problème à la résolution d'équations intégrales portant sur la plaque et ses bords et éventuellement sur les autres surfaces limitants les deux milieux fluides.

Deux cas extrêmes peuvent être envisagés :

1°) On connait la fonction de Green de la plaque et les fonctions de Green de deux milieux vérifiant la condition de Neuman sur la plaque: en effet, pour les fluides, la donnée sur la frontière que constitue la plaque est la vitesse normale.

2°) Ces trois fonctions sont inconnues.

a) Quand on connait les trois fonctions de Green, on obtient immédiatement une équation intégrale pour le déplacement de la plaque en exprimant la condition de continuité.

b) Quand les trois fonctions de Green sont inconnues, on part des solutions élémentaires de l'opérateur des plaques et de l'équation de Helmoltz .

Le champ acoustique dans les deux milieux est exprimé sous la forme de la somme du champ incident et de potentiels de couches réparties sur la plaque et sur les autres frontières des fluides. De même l'élongation de la plaque est prise sous la forme de la somme de la vibration incidente et de deux potentiels de couches réparties sur son bord.

En écrivant les conditions aux limites sur les bords de la plaque et sur les surfaces limitants les milieux, ainsi que la condition de continuité sur la plaque, on obtient un système de six équations intégrales. La résolution numérique de ces équations est de toute évidence très lourde dans le cas général.

Cependant certains auteurs ont utilisé cette méthode. En particulier, P.Morse [9] a traité le problème de la transparence au son d'une membrane circulaire, encastrée, dans un baffle rigide-infinie (problème qui, en ce qui nous occupe, est tout à fait semblable au nôtre), et il donne une méthode de résolution par approximations successives. Il faut noter au passage que la convergence n'est pas prouvée a priori.

3.- CAS PARTICULIER IMPORTANT : LA PLAQUE INFINIE DANS UN FLUIDE INFINI.

La complexité du problème dans sa généralité nous a amené à chercher la solution d'un cas particulier de couplage: celui de la plaque infinie dans un fluide infini. La résolution d'un problème quelconque de couplage permet en effet de dégager l'essentiel du phénomène, et à partir de sa solution formelle, des calculs approchés sont possibles qui fournissent les renseignements les plus importants pour des problèmes plus généraux.

C'est là une idée générale : on sait par exemple que la solution de l'équation de Helmoltz se comporte, pour l'essentiel, comme la solution de l'équation de Laplace (l'opérateur est essentiellement un Laplacien) ; de même, l'élongation d'une plaque finie dans le vide soumise à n'importe quelle condition aux limites se comporte principalement comme l'élongation d'une plaque infinie dans le vide.

Nous avons donc axé notre étude théorique sur la résolution du couplage entre la vibration d'une plaque mince, non dissipative, infinie, homogène, isotrope, excitée par une force ponctuelle et le champ acoustique crée dans un fluide homogène, parfait, compressible, environnant la plaque, en régime stationnaire.

3.1.- Revue bibliographique.

Depuis une quinzaine d'années de nombreux auteurs (de [1] à [16]) se sont intéressés à ce problème particulier pour différentes sortes d'excitations de la plaque, en particulier: force ponctuelle, moment ponctuel, ligne de force, et ligne de moment. Les différentes méthodes proposées utilisent la transformée de Fourier dont l'inversion est faite approximativement par une intégration, à l'aide de la méthode des résidus, d'expressions approchées. Ces approximations n'étant pas toujours correctes, le domaine de validité des résultats ainsi obtenus n'est pas aussi important que celui donné par leurs auteurs. Parmi les résultats approximatifs donnés, on trouve l'expression du champ acoustique proche, et du champ lointain, la puissance rayonnée dans le fluide pour des fluides "légers ou lourds" "aux hautes fréquences ou basses fréquences". Certains de ces résultats font apparaître l'expression du champ proche sous la forme de la somme de fonctions Hanckel de première espèce, dont une fonction non holomorphe sur l'axe perpendiculaire à la plaque passant par le point source. L'apparition de fonctions singulières semble due au fait qu'on a cherché le champ acoustique séparable en coordonnées cylindriques, alors que, dans ce problème il n'est séparable qu'en coordonnées sphériques. Pour le champ lointain on trouve celui d'une source ponctuelle sphérique, ce qui n'est qu'une approximation comme le montreront nos formules. Pour la puissance rayonnée dans le fluide, il est fait usage de la formule de Parseval qui n'est pas applicable dans ce problème; aussi les résultats publiés jusqu'ici sont ils assez différents des nôtres.

Pour conclure, disons que ce problème n'avait encore reçu aucune solution rigoureuse et complète, à notre connaissance.

3.2.- Nos principaux résultats.

Nous partons du principe de Hamilton afin d'obtenir une écriture variationnelle des équations respectant le principe de conservation d'énergie et d'éliminer ainsi les

solutions mathématiques mais non physiques du problème écrit sous la forme classique. On obtient dès le départ des conditions sur la solution du système différentiel classique. Ce système se découple aisément, et on a finalement à résoudre une équation de convolution donnant le déplacement de la plaque. Cette équation de convolution a pour le noyau la somme de l'opérateur des plaques dans le vide et du noyau de Green pour l'opérateur de Helmoltz vérifiant la condition de Neuman sur la plaque.

La transformée de Fourier est un outil naturel de résolution de cette équation, mais l'inversion de la transformée de Fourier de la solution demande quelques soins. Pour y parvenir nous la décomposons en sommes,et produits de transformée de Fourier de distribution, dont des résultats classiques fournissent alors immédiatement l'inverse cherché. En choisissant parmi les inverses possibles celle qui vérifie le principe de conservation d'énergie, nous aboutissons à l'expression analytique de la solution du problème physique. Nous évitons par cette technique les difficultés du choix d'un contour d'intégration satisfaisant aux conditions imposées par la nature physique du problème.

Nous en déduisons l'expression du champ acoustique. Le champ acoustique ainsi obtenu montre que le problème est séparable en coordonnées sphériques; à l'infini il se comporte comme le champ d'une source multipolaire . Nous donnons également l'expression du champ acoustique sur la plaque. C'est notre deuxième résultat important.

Le calcul de la puissance totale moyenne admise par le système et de la puissance moyenne dissipée dans la plaque à l'infini se fait à partir des expressions de l'élongation de la plaque à l'origine et de son comportement à l'infini.

La puissance moyenne rayonnée dans le fluide se calcule par différence de ces deux puissances en vertu du principe de conservation de l'énergie. Nous avons donc évité l'emploi de la formule de Parseval, dont la validité conduirait à l'égalité de la puissance totale moyenne admise par le système et la puissance rayonnée dans le fluide.

De l'expression de la puissance totale admise par le système, nous tirons immédiatement la partie réelle de l'admittance du système "plaque infinie-fluide". C'est là notre troisième apport qui décrit, du point de vue énergétique le phénomène du couplage. Ce paramètre définit l'essentiel du comportement d'une plaque couplée, et nous remarquons que le système se comporte différemment avant et après la fréquence critique qui correspond à l'égalité de la longueur d'onde dans la plaque et de la longueur d'onde dans le fluide. Pour une force constante, au-dessous de la fréquence critique le système admet une énergie importante qui reste en quasi-totalité dans la plaque; au-

dessus de la fréquence critique la puissance totale admise qui décroît très rapidement est en quasi-totalité rayonnée dans le fluide.

Remarque 1.

Pour une plaque infinie séparant deux fluides différents, nous prenons pour la partie réelle de l'admittance de ce système la demi-somme des parties réelles de l'admittance de la plaque dans chacun de ces deux fluides. Nous démontrons sur la transformée de Fourier que cette approximation nous amène à négliger un opérateur dont la transformée de Fourier décroît très rapidement à l'infini.

Remarque 2.

L'élongation d'une plaque infinie couplée excitée par une force harmonique quelconque se calcule à partir du produit de convolution de la solution pour une force ponctuelle harmonique à l'origine par la force considérée.

Crighton [30] dans un article postérieur à notre première publication [17] a suivi la méthode de décomposition de la transformée de Fourier de la solution en éléments simples pour une plaque infinie dans un fluide infini excitée soit par une ligne de force, soit par une ligne de moment; mais inversant la transformée de Fourier de la solution en utilisant la méthode des résidus, il fait quelques approximations si bien que ses résultats se limitent à l'élongation de la plaque au voisinage de la ligne d'excitation, et à l'admittance du système.

4.- PLAQUE DE DIMENSIONS FINIES DANS UN FLUIDE.

Connaissant le comportement de la plaque infinie couplée, nous pouvons déduire l'essentiel du comportement d'une plaque finie couplée, en calculant le flux de puissance à travers un cercle tracé sur la plaque infinie et de même surface que la plaque, moyennant deux approximations.

La première consiste à supposer qu'il y a égalité entre d'une part le rapport de la puissance moyenne rayonnée dans une plaque finie ou infinie à la puissance totale moyenne admise par le système "plaque finie, ou infinie-fluide", et d'autre part le rapport de la partie réelle de l'admittance du système "plaque finie, ou infinie-fluide" à la partie réelle de l'admittance de la plaque dans le vide.

La deuxième approximation suppose qu'il y a égalité entre d'une part le rapport de la puissance moyenne qui reste dans une plaque infinie et de la puissance moyenne

admise par le système "plaque finie-fluide", et d'autre part le rapport du flux de puissance moyenne à travers un cercle tracé sur la plaque infinie et de même surface que la plaque finie et de la puissance moyenne admise par le système "plaque infinie-fluide" . Moyennant quoi, nous pouvons donner l'expression approximative de la partie réelle de l'admittance du système "plaque finie-fluide".

L'utilisation de la formule liant la densité de modes propres de la plaque à la partie réelle de son admittance, permet une première vérification expérimentale: nous montrons que la densité de modes propres mesurée correspond de façon satisfaisante à celle que prévoit notre théorie.

En assimilant la présence du fluide au-dessous de la fréquence critique à une augmentation de masse de la plaque dans le vide donnée par le rapport des admittances de la plaque couplée et dans le vide, on peut donner les fréquences propres d'une plaque couplée avec un fluide ou deux fluides différents au-dessous de la fréquence critique à partir des fréquences propres de cette plaque dans le vide. Là encore une vérification expérimentale a montré la validité de notre approximation.

Au-dessus de la fréquence critique, nous suggérons que la présence du fluide peut être assimilée à une augmentation de rigidité de la plaque dans le vide donnée par le rapport des admittances de la plaque dans le vide et couplée. La délicatesse de l'expérience au-dessus de la fréquence critique ne nous a pas permis une confrontation aussi complète des résultats expérimentaux et des prévisions théoriques, cependant, on a pu obtenir dans le cas du couplage avec l'air et l'eau quelques résultats vérifiant bien la validité de cette approximation.

En résumé, nous montrons dans le présent travail que l'étude théorique complète du système très simplifiée "plaque infinie-fluide infini" fournit les principaux paramètres d'un système général: plaque finie couplée avec un ou deux fluides finis ou non; des formules simples donnent la densité de modes propres de la plaque et ses fréquences propres à partir des données correspondantes dans le vide.

5.- PLAN DE L'EXPOSE.

On distingue dans ce texte deux parties :

La première partie (six chapitres) consiste en l'étude théorique du couplage entre une plaque mince, homogène, isotrope, infinie et un fluide parfait, homogène, en régime stationnaire.

Dans le premier chapitre, nous mettons en équation le problème en appliquant le principe de Hamilton, et nous aboutissons à l'équation découplée en u (déplacement de la plaque).

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons la transformée de Fourier pour résoudre cette équation. La décomposition de la transformée de Fourier en produit et somme de transformées de Fourier de distributions connues, permet une inversion immédiate et nous choisissons parmi les inverses possibles celle compatible avec les deux exigences suivantes : Pour une force bornée :

a) la puissance totale moyenne admise par le système est bornée et positive,

b) la puissance moyenne dissipée dans la plaque à l'infini est bornée et positive.

Nous obtenons ainsi la solution exacte du problème à l'aide de fonction de Schwarz.

Le chapitre trois est consacré à l'étude du déplacement de la plaque à l'infini, à sa valeur à l'origine, ainsi qu'à la valeur à l'origine de ses trois premières dérivées.

Dans le chapitre quatre, nous donnons l'expression du potentiel de vitesse du champ acoustique se propageant dans le fluide ainsi que son comportement asymptotique à l'infini et sa valeur sur la plaque.

Les chapitres cinq et six sont consacrés respectivement au calcul des différentes puissances mises en jeu et à l'illustration numérique de ces résultats pour différentes plaques et différents fluides.

Dans la deuxième partie, nous cherchons à vérifier les résultats théoriques de la première partie. Par des considérations énergétiques, nous obtenons une approximation de la partie réelle de l'admittance du système "plaque finie-fluide" à partir de la partie réelle de l'admittance du système "plaque infinie-fluide" (chapitre 7).

Le chapitre huit est consacré à une première vérification expérimentale des formules obtenues au chapitre sept.

La mesure de la densité de modes propres de la plaque permet en effet de retrouver la partie réelle de l'admittance.

Nous assimilons, dans le chapitre neuf, la présence du fluide à une augmentation de masse de la plaque, au-dessous de la fréquence critique. La diminution de la partie réelle de l'admittance due au couplage permet de connaître l'augmentation de masse équivalente, et donc de déterminer théoriquement les fréquences propres de la plaque couplée. La confrontation entre l'expérience et la prévision théorique est satisfaisante.

Dans le chapitre X nous envisageons le calcul de la transparence au son d'une cloison. Pour traiter de façon globale ce problème nous supposons qu'un pression acoustique constante s'exerce sur la surface S de la plaque. Nous déduisons ainsi la puissance moyenne admise par le système et la puissance moyenne transmise. Nous confrontons nos prévisions théoriques d'indice d'affaiblissement avec les résultats expérimentaux et théoriques de F. Spronck [22].

Première Partie

Etude théorique d'une plaque mince infinie couplée avec un fluide

- CHAPITRE 1 -

1. ENONCE DU PROBLEME.

Nous obtenons le système d'équations du problème physique en appliquant une méthode variationnelle. Ce système nous guidera par la suite pour choisir parmi les solutions mathématiques, celle correspondant au problème physique.

On considère une plaque non dissipative, mince, infinie, homogène et d'épaisseur constante occupant le plan Σ ($z = 0$); on suppose que les deux demi espaces ($z > 0$ et $z < 0$) sont occupés par un fluide homogène parfait.

Désignons par u l'élongation de la plaque, et par φ le potentiel des vitesses du champ acoustique dans le fluide occupant le demi espace Ω $(z < 0)$. Le potentiel de vitesse dans le demi espace $z > 0$ est le symétrique de φ par rapport au plan Σ .

Le principe de Hamilton appliqué à u et φ conduit à écrire : (voir [20])
en ce qui concerne le mouvement de la plaque

$$\int_\Sigma^D \left\{ (1-\upsilon) \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_j^2} \right\} dS +$$

$$+ m \int_\Sigma \ddot{u}\, \dot{u}\, dS = \int_\Sigma f \dot{u}\, ds + 2\rho \int_\Sigma \dot{\varphi}\, \dot{u}\, dS \qquad (1)$$

pour un point du fluide :

$$\rho \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \varphi \, d\Omega + \frac{\rho}{C^2} \int_\Omega \ddot{\varphi}\, \dot{\varphi}\, d\Omega = 0 \qquad (2)$$

où :

D = coefficient de rigidité de la plaque (supposé réel)

υ = coefficient de Poisson

m = masse de la plaque par unité de surface.

C = vitesse du son dans le fluide

f = force extérieure exercée sur la plaque

ρ = masse volumique du fluide. On utilisera par la suite $\sigma = \frac{2\rho}{D}$

$d\Omega$ = élément de volume

dS = élément de surface.

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \; ; \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; ; \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \; ; \quad \ddot{\Phi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Pour obtenir (1) on écrit l'énergie de déformation (sous la forme oblique) et l'énergie cinétique de la plaque :

$$U = \int_{\Sigma} \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right\} dS$$

et $$K_1 = \frac{1}{2} m \int_{\Sigma} \dot{u}^2 \, dS$$

que l'on égale à la somme de l'énergie due à la force extérieure exercée sur la plaque et de l'énergie due à la pression acoustique. En prenant la variation totale pour une variation δt du temps on aboutit à (1).

Pour obtenir (2) on part des expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du fluide

$$E = \frac{1}{2\rho C^2} P^2$$

et $$K_2 = \frac{1}{2} \rho V^2$$

P = pression acoustique

V = vitesse acoustique.

En supposant qu'il n'y a pas de source dans le fluide et que $V = -\operatorname{grad} \Phi$, la variation totale d'énergie nous donne (2).

On peut supposer que $f = F \delta$ (force ponctuelle à l'origine d'amplitude F réelle) sans pour cela perdre en généralité. Un intégration par partie de (1) et (2) permet de mettre en relief les puissances instantanées dissipées à l'infini dans le fluide et dans la plaque.

Désignons par C le cercle de l'infini sur Σ de normale extérieure n et de tangente s ; et par S la demi-sphère de l'infini dans Ω de normale extérieure n', il vient :

$$D \int_{\Sigma} (\Delta^2 u + \frac{m}{D} \ddot{u}) \dot{u} dS + D \int_{C} \Big\{ [\mathrm{Tr}\,(\partial_n \Delta u) + (1-\nu)\,\partial_s\,\mathrm{Tr}\,(\partial_n \partial_s u)]\,\mathrm{Tr}\,\dot{u}$$

(3)

$$- \mathrm{Tr}\,(\Delta u - (1-\nu)\,\partial_s^2 U)\,\mathrm{Tr}\,\partial_n \dot{u} \Big\} dx = F \int_{\Sigma} \delta\dot{u}\, dS + \rho \int_{\Sigma} \dot{\Phi}\, \dot{u}\, dS$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} (-\rho \Delta \varphi + \frac{\rho \ddot{\Phi}}{C^2})\, \dot{\Phi}\, d\Omega + \rho \int_{\Sigma} \mathrm{Tr}\,(\frac{\partial \varphi}{\partial z})\,\mathrm{Tr}\,(\dot{\Phi})\, dS + \rho \int_{S} \mathrm{Tr}\,(\partial_n \varphi)\mathrm{Tr}\,(\dot{\Phi}) dS$$

où on désigne par $\mathrm{Tr}\,(\ )$ la valeur d'une fonction sur C, S ou Σ. Pour démontrer (3) et (4) on effectue des intégrations par partie ; en supposant u et φ prolongés par zéro au-delà de C, Σ et S.

Nous démontrons ici seulement le passage de (1) à (3). Le passage de (2) à (4) se fait par une méthode analogue.

On peut écrire tout d'abord :

$$(1-\nu) \int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_i \partial x_j} dS + \nu \int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_j^2} dS =$$

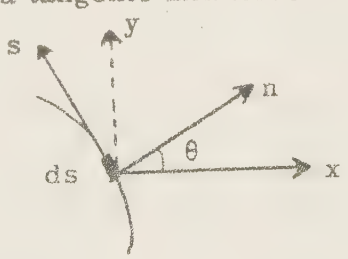
$$= \int_{\Sigma} \Delta u \,.\, \Delta \dot{u}\, ds + (1-\nu) \int_{\Sigma} (2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2})\, dS$$

où $dS = dx\,dy$

Prenons pour coordonnées n la normale unitaire extérieure à C (le cercle de l'infini dans la plaque) et s la tangente unitaire. Soit

on a $\begin{cases} dy = ds \cos\theta \\ dx = -\,ds \sin\theta \end{cases}$

ds = élément de contour C.



$$\int_{\Sigma} \Delta u \,.\, \Delta \dot{u}\, dx\,dy = \int_{\Sigma} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x} [\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \Delta u] + \frac{\partial}{\partial y} [\frac{\Delta \dot{u}}{\partial y} \Delta u] - \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta u -$$

$$- \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta u \Big\} dx\,dy = \int_{C} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \mathrm{Tr}\,(\Delta u)\, dy + \int_{C} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \mathrm{Tr}\,(\Delta u)\, dx -$$

$$- \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta u + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta u \right\} dx\,dy = \int_C Tr\,(\Delta u)\,\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \sin\theta \right) ds -$$

$$- \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\dot{u} \frac{\partial}{\partial y} \Delta u \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\dot{u} \frac{\partial}{\partial x} \Delta u \right] - \dot{u} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta u + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u \right] \right\} dx\,dy =$$

$$= \int_C Tr\,(\Delta u)\,Tr\,\frac{\partial \dot{u}}{\partial n}\,ds + \int_\Sigma \Delta\Delta u\,\dot{u}\,dx\,dy - \int_C Tr\,(\dot{u})\,Tr\,\left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta u \right) dy +$$

$$+ \int_C Tr\,(\dot{u})\,Tr\,\left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta u \right) dx = \int_\Sigma (\Delta\Delta u)\,\dot{u}\,dx\,dy + \int_C Tr\,(\Delta u)\,Tr\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial n} \right) ds -$$

$$- \int_C Tr\,(\dot{u})\,Tr\,\left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right) ds.$$

De la même façon on a :

$$(1-\nu) \int_\Sigma \left\{ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} \right\} dx\,dy$$

$$= (1-\nu) \int_C \left[Tr\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) Tr\,\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + Tr(\dot{u})\,Tr\,\frac{\partial}{\partial s}\,\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n\,\partial s} \right) \right] ds$$

et finalement en supposant u prolongé par zéro à l'extérieur de C on a :

$$D \int_\Sigma \left\{ (1-\nu) \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \nu \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_j^2} \right\} dS$$

$$+ \int_\Sigma m\ddot{u}\,dS = D \int_\Sigma \left(\Delta^2 u + \frac{m}{D} \ddot{u} \right) \dot{u} + \int_C \left\{ \left[Tr\left(\partial_n \Delta u \right) + (1-\nu)\,\partial_s\,Tr\left(\partial_n \partial_s u \right) \right] \right.$$

$$\left. Tr\,(\dot{u}) - Tr\left[\Delta u - (1-\nu)\,\partial_s^2 u \right] Tr\,\partial_n \dot{u} \right\} ds$$

le passage de (2) à (4) se fait par la même méthode en prenant les coordonnées liées à Σ et à S.

Dans (3) l'intégrale sur C représente la puissance instantanée dissipée à l'infini dans la plaque. Dans (4) l'intégrale sur Σ représente la puissance instantanée (changé de signe) rayonnée par la plaque dans le fluide, et l'intégrale sur S représente la puissance instantanée dissipée à l'infini dans le fluide.

Le problème est complètement formulé en écrivant que, sur Σ la vitesse normale dans le fluide est égale à la vitesse de la plaque, soit :

$$(5) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \dot{u}$$

Le système d'équations (3), (4) et (5) est équivalant au système d'équations écrit généralement pour ce problème. Soit :

$$(5') \begin{cases} D\,\Delta^2 u + m\,\ddot{u} = f + \rho\,\ddot{\varphi} \\ -\Delta\varphi + \dfrac{\ddot{\varphi}}{C^2} = 0 \\ -\partial_z \varphi = \dot{u} \end{cases}$$

mais contient en outre des conditions sur le comportement à l'infini de u et φ : il faut tout d'abord que les intégrales sur C et S convergent; puis, en régime permanent, il faut que leurs valeurs moyennes sur une période soient positives, ce qui correspond à une dissipation d'énergie; on est alors conduit à adjoindre au système d'équations aux dérivées partielles la condition de Sommerfeld connue pour φ

$$(\partial_r \pm i\alpha)\,\varphi = 0\,(r^{-2})$$

et une condition analogue pour u que nous indiquons au chapitre II.

Parmi les solutions mathématiques du système d'équations (5') figure la solution physique du système d'équation (3), (4) et (5), traduisant les deux conditions citées au-dessus. Nous résolvons donc le système (5') en choisissant la solution qui vérifie (3), (4) et (5). Pour résoudre (5') nous nous ramenons à une équation découplée en u. Considérons le régime harmonique $(e^{-i\omega t})$.

Désignons par G la fonction de Green de l'opérateur d'Helmoltz dans Ω vérifiant la condition de Neumann sur Σ soit :

$$G = -\frac{e^{ikr(M-P)}}{4\pi r(M-P)} - \frac{e^{ikr(M-P')}}{4\pi r(M-P')} \qquad \text{ou} \quad \begin{cases} M \text{ et } P \in \Omega \quad z<0 \\ P' \in \Omega_2 \, z>0 \end{cases}$$

et P' symétrique de P par rapport à Σ.

L'application de la formule de Green G et φ nous conduit à chercher φ sous la forme :

$$\varphi = 2i\omega\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \overset{*}{\underset{\Omega}{}} (u\,\delta_\Sigma)$$

($\overset{*}{\underset{\Omega}{}}$ = convolution dans $\Omega + \Sigma$, δ_Σ = mesure de Dirac portée par Σ).

En portant φ dans le système d'équations aux dérivées partielles, on se ramène à l'équation de convolution en u.

$$(6) \quad \left[(\Delta^2 - \lambda^4)\,\delta - 2\omega^2 \sigma \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right] * u = \frac{F}{D}\,\delta$$

($*$ = convolution sur Σ).

Pour déterminer la solution élémentaire de cette équation intégro-différentielle nous utilisons la transformation de Fourier.

- C H A P I T R E II -

II.- SOLUTION ELEMENTAIRE DU PROBLEME (6).

L'équation (6) étant une équation de convolution nous utilisons donc la transformation de Fourier pour la résoudre. Nous décomposons la transformée de Fourier de la solution en somme et produit de transformées de Fourier de distributions connues, et immédiates à inverser. Nous obtenons finalement l'expression formelle de u à l'aide de fonctions de Schwarz.

II.1. Transformée de Fourier de (6) et de u.

On sait [26] [27]

$$\mathcal{F}\,(\Delta^2 - \lambda^4)\,\delta = 16\,\pi^4\,\xi^4 - \lambda^4$$

et

$$\mathcal{F}\,\left(2\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\right) = 4\pi \int_0^\infty \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\, J_0\,(2\pi\xi\, r)\, r\, dr = (4\pi^2\xi^2 - k^2)^{-1/2}$$

d'où la transformée de Fourier de (6)

$$(7) \qquad \left\{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4) - \omega^2\,\sigma\,(4\pi^2\xi^2 - k^2)^{-1/2}\right\}\,\hat{u} = \frac{F}{D}$$

$$(\hat{u} = \mathcal{F}\,u)$$

qui donne

$$\hat{u} = \frac{F}{D}\,(4\pi^2\,\xi^2 - k^2)^{1/2}\;\frac{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)\,(4\pi^2\xi^2 - k^2)^{1/2} + \omega^2\,\sigma}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)^2\,(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\,\sigma^2}$$

Nous allons décomposer $\hat{u}$ en éléments simples, pour cela posons :

$$4\pi^2\,\xi^2 = X$$

soit Q le polynôme du 5ème degré

$$Q = (X^2 - \lambda^4)^2\,(X - k^2) - \omega^4\,\sigma^2.$$

Désignons par α_j^2 ses racines réelles et par β_j^2 ses racines complexes de parties

imaginaires positives, on peut écrire en général :

$$\frac{1}{Q} = \sum_j \frac{a_j}{X - \alpha_j^2} + 2 \sum \mathrm{Re} \frac{b_j}{X - \beta_j^2}$$

On démontre facilement que :

si $k^2 > \lambda^2$ il existe une racine réelle $> k^2$, et 4 racines complexes ;

si $k^2 < \lambda^2$ il existe une racine réelle $> \lambda^2$ soit deux racines réelles

$> k^2$ et 2 racines complexes, soit 4 racines complexes.

D'où compte tenu des relations liant les a_j et les b_j aux α_j^2 et β_j^2

$$(8) \quad \hat{u} = \frac{F}{D} \left\{ \sum_j a_j \frac{(k^2 - \alpha_j^2)(\lambda^4 - \alpha_j^4)}{(4\pi^2\xi^2 - \alpha_j^2)} + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \frac{(k^2 - \beta_j^2)(\lambda^4 - \beta_j^4)}{(4\pi^2\xi^2 - \beta_j^2)} \right.$$
$$\left. - \omega^2 \sigma \left[\sum_j a_j \frac{k^2 - \alpha_j^2}{4\pi^2\xi^2 - \alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \frac{k^2 - \beta_j^2}{4\pi^2\xi^2 - \beta_j^2} \right] (4\pi^2\xi^2 - k^2)^{-1/2} \right\}$$

Pour démontrer (8) il suffit de remarquer que :

(a) $\sum_j a_j + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j = 0$

(b) $\sum_j a_j \alpha_j^2 + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \beta_j^2 = 0$

(c) $\sum_j a_j \alpha_j^4 + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \beta_j^4 = 0$

(d) $\sum_j a_j \alpha_j^6 + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \beta_j^6 = 0$

(e) $\sum_j a_j \alpha_j^8 + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \beta_j^8 = 1$

L'égalité (a) est immédiate à démontrer, il suffit de réduire au même dénominateur la décomposition Q . En égalant les termes d'ordre supérieur de chaque coté, on obtient (a). Pour démonter (b), on écrit :

$$\frac{X}{Q} = X \sum_j \frac{a_j}{X-\alpha_j^2} + 2X \sum_j \mathrm{Re}\, \frac{b_j}{X-\beta_j^2}$$

soit :

$$\frac{X}{Q} = \sum_j \left[\frac{a_j (X-\alpha_j^2)}{X-\alpha_j^2} + \frac{a_j \alpha_j^2}{X-\alpha_j^2} \right] + 2 \sum_j \mathrm{Re} \left[\frac{b_j (X-\beta_j^2)}{X-\beta_j^2} + \frac{b_j \beta_j^2}{X-\beta_j^2} \right]$$

$$= \sum_j a_j + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j + \sum_j \frac{a_j \alpha_j^2}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, \frac{b_j \beta_j^2}{X-\beta_j^2}$$

donc :

$$\frac{X}{Q} = \sum_j \frac{a_j \alpha_j^2}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, \frac{b_j \beta_j^2}{X-\beta_j^2}$$

Réduisons au même dénominateur; l'égalité des termes d'ordre le plus élevé donne (b).

Pour démontrer (c) il suffit d'écrire :

$$\frac{X^2}{Q} = X \sum_j \frac{a_j \alpha_j^2}{X-\alpha_j^2} + 2X \sum_j \mathrm{Re}\, \frac{b_j \beta_j^2}{X-\beta_j^2}$$

$$= \sum_j \frac{a_j \alpha_j^4}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \frac{b_j \beta_j^4}{X-\beta_j^4}$$

et de façon analogue la réduction au même dénominateur et l'égalité du terme, d'ordre supérieur de chaque coté donne (c). Le même type de démonstration donne (d) et (e).

Il s'ensuit que :

$$\frac{(X^2-\lambda^2)(X-k^2)}{Q} = \sum a_j \frac{(\alpha_j^4-\lambda^4)(\alpha_j^2-k^2)}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re}\, b_j \frac{(\beta_j^4-\lambda^4)(\beta_j^2-k^2)}{X-\beta_j^2}$$

car par le procédé cité auparavant les termes

$$\frac{X^3}{Q}, \quad \frac{k^2 X^2}{Q}, \quad \frac{\lambda^4 X}{Q} \text{ et } \frac{\lambda^4 k^2}{Q}$$

se remplacent respectivement par :

$$\sum_j \frac{a_j \alpha_j^6}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re} \frac{b_j \beta_j^6}{X-\beta_j^2}$$

$$\sum_j \frac{a_j k^2 \alpha_j^4}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum_j \mathrm{Re} \frac{b_j k^2 \beta_j^4}{X-\beta_j^2}$$

$$\sum_j \frac{a_j \lambda^4 \alpha_j^2}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum \mathrm{Re} \frac{b_j \lambda^4 \beta_j^2}{X-\beta_j^2}$$

$$\sum \frac{a_j \lambda^4 k^2}{X-\alpha_j^2} + 2 \sum \mathrm{Re} \frac{b_j \lambda^4 k^2}{X-\beta_j^2}$$

Donc il est facile de voir que :

$$\hat{u} = \frac{F}{D} \left[\frac{(X^2-\lambda^4)(X^2-k^2)}{Q} + \frac{\omega^2 \sigma (X-k^2)}{Q} \cdot \frac{1}{\sqrt{X-k^2}} \right]$$

peut s'écrire sous la forme (8).

II.2. Calcul de u .

Pour inverser $\hat{u}$ on tient compte des égalités connues

$$\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 - \alpha^2} = \frac{i}{4} H_0(\alpha r)$$

($H_0 = J_0 + i y_0$ fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro) et

$$\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{(4\pi^2 \xi^2 - k^2)^{1/2}} = 2 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

Donc, la formule (8) s'inverse immédiatement et donne :

$$
\begin{aligned}
u = \frac{F}{D} \Bigg\{ & \sum_j a_j (k^2 - \alpha_j^2)(\lambda^4 - \alpha_j^4) \frac{i}{4} H_0(\alpha_j r) + \\
& + 2 \sum_j \mathrm{Re} \left[b_j (k^2 - \beta_j^2)(\lambda^4 - \beta_j^4) \frac{i}{4} H_0(\beta_j r) - \right. \\
& - 2\omega^2 \sigma \sum_j a_j (k^2 - \alpha_j^2) \frac{i}{4} H_0(\alpha_j r) \underset{\Sigma}{*} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \\
& \left. - 4\omega^2 \sigma \sum_j \mathrm{Re}\, b_j (k^2 - \alpha_j^2) \frac{i}{4} H_0(\beta_j r) \underset{\Sigma}{*} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Expression dans laquelle α_j est la racine carrée positive de α_j^2 et β_j est la racine carrée de β_j^2 située dans le premier quadrant. Ce choix est le seul permettant que u soit borné à l'origine pour une force bornée et que l'intégrale sur C figurant dans (3) soit convergente et de valeur moyenne positive, c'est-à-dire le seul choix permettant de vérifier le principe de conservation de l'énergie.

L'expression (9) montre qu'il peut exister soit trois ondes progressives et une onde stationnaire, soit une onde progressive et deux ondes stationnaires. La présence des ondes stationnaires est due à l'émission d'une onde cylindrique de la plaque.

Pour rendre l'expression (9) plus commode pour le calcul numérique, il est nécessaire d'expliciter les produits de convolution, ce qui peut se faire à l'aide de fonctions de Schwarz (fonctions tabulées [28][29]). D'où l'expression u

$$
\begin{aligned}
u = \frac{F}{D} \Bigg\{ & \sum_j \frac{i}{4} a_j (k^2 - \alpha_j^2)(\lambda^4 - \alpha_j^4) H_0(\alpha_j r) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_j I_m \left[b_j (k^2 - \beta_j^2)(\lambda^4 - \beta_j^4) H_0(\beta_j r) - \right. \\
& - \frac{i\omega^2\sigma}{4k} \sum_j a_j (k^2 - \alpha_j^2) \left[Je\left(\frac{\alpha_j}{k}, kr\right) H_0(\alpha_j r) + J_0(\alpha_j r) He\left(\frac{\alpha_j}{k}, kx\right) \right]_r^\infty \Bigg] \\
& - \frac{i\omega^2\sigma}{4k} \sum_j b_j (k^2 - \beta_j^2) \left[Je\left(\frac{\beta_j}{k}, kr\right) H_0(\beta_j r) + J_0(\beta_j r) He\left(\frac{\beta_j}{k}, kx\right) \right]_r^\infty \Bigg] \\
& \left. - \frac{i\omega^2\sigma}{4k} \sum_j b_j (k^2 - \beta_j^{-2}) \left[Je\left(\frac{-\overline{\beta_j}}{k}, kr\right) H_0(-\overline{\beta_j} r) + J_0(-\overline{\beta_j} r) He\left(\frac{-\overline{\beta_j}}{k}, kx\right) \right]_r^\infty \Bigg] \right\}
\end{aligned} \tag{10}
$$

où $Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) = \int_0^{kr} e^{ix} J_0\left(\frac{\alpha}{k} x\right) dx$

$$He\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right)\Big|_r^{\infty} = \int_{kr}^{\infty} e^{ix} H_0\left(\frac{\alpha}{k} x\right) dx$$

sont les fonctions de Schwarz.

Pour aboutir à (10) on écrit le développement de Neumann de $H_0(\alpha R)$
R = la distance entre deux points $M(x, \theta)$ et $P(r, \theta')$ de Σ

$$H_0(\alpha R) = \sum_{m=o}^{\infty} \begin{cases} H_m(\alpha r) J_m(\alpha x)\cos(m(\theta - \theta')) & x \leq r \\ H_m(\alpha x) J_m(\alpha r)\cos(m(\theta - \theta')) & x \geq r \end{cases}$$

avec :

$$\Sigma_m = \begin{cases} 2 \text{ si } m \neq 0 \\ 1 \text{ si } m = 0 \end{cases}$$

et

l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \theta') d\theta = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq 0 \\ 2\pi \text{ pour } m = 0 \end{cases}$

alors l'expression (10).

Note : La solution (10) proposée est la seule solution mathématique de l'équation intégro-différentielle (6) qui permette pour une force bornée F, que la puissance moyenne admise par le système et la puissance dissipée à l'infini dans la plaque soient bornées et > 0 elle est donc la seule qui vérifie le système (3), (4), (5) qui traduit le principe de conservation d'énergie. En effet, on peut montrer [32] que l'équation intégro-différentielle (6) admet une et une seule solution vérifiant l'une des 8 conditions de Sommerfeld suivantes:

$$u(\to \infty) = 0\left(r^{-1/2}\right)$$

$$\prod_j \left(\partial_r \pm i\alpha_j\right) u\ (r \to \infty) = 0\ \left(r^{-3/2}\right)$$

(car on a démontré que le polynom Q possède une à trois racines réelles et les β_j (racine carrée de β_j^2) sont choisies dans le premier quadrant, donc ne donnant pas de contribution à l'infini). Il est alors facile de voir que la solution de (6) compatible avec les deux exigences suivantes :

Pour une force bornée :

1) la puissance moyenne dissipée à l'infini dans la plaque est bornée et positive.

2) La puissance totale moyenne admise par le système est bornée et positive est celle qui vérifie :

$$u(r \to \infty) = 0(r^{-1/2}) \,,\ \prod_j (\partial_r - i\alpha_j)\, u(r \to \infty) = 0(r^{-3/2})$$

c'est donc la solution du problème physique et elle est donnée par (10).

L'expression (10) fournit la possibilité d'étudier le comportement de u à l'origine, à l'infini (renseignements importants pour le calcul des puissances), la limite de u quand le fluide s'évanouit et de calculer le potentiel de vitesse acoustique φ dans le fluide.

- CHAPITRE III -

III.- ETUDE DE u A L'ORIGINE, DE SES TROIS DERIVEES PAR RAPPORT A r ET DE SON COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE A L'INFINI.

Il est intéressant de connaître l'élongation de la plaque à l'origine et son comportement asymptotique. Nous démontrons en outre ici que l'élongation de la plaque couplée se comporte à l'origine et à l'infini comme le noyau élémentaire de l'équation des plaques dans le vide; nous donnons les expressions de u à l'origine et à l'infini. Ces deux expressions vont être utilisées par la suite pour le calcul de la puissance totale moyenne admise par le système et de la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans la plaque.

III.1.- Expression de u à l'origine et de ses trois premières dérivées par rapport à r à l'origine.

Nous allons démontrer sur la formule (10) que u se comporte à l'origine comme le noyau élémentaire de l'équation des plaques dans le vide : u et $\frac{\partial u}{\partial r}$ sont continus à l'origine, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ a une singularité logarithmique, et $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}$ a une singularité en $\frac{1}{r}$.

(a) Expression de u à l'origine.

Pour calculer u à l'origine nous partons des égalités et des approximations connues :

$$H_0(\alpha r) = J_0(\alpha r) + i\, Y_0(\alpha r)$$

$$J_0(\alpha \varepsilon) \simeq 1 \,,\; Y_0(\alpha \varepsilon) \simeq \frac{2}{r}(\log \alpha + \log \varepsilon) \quad (\varepsilon \simeq 0)$$

et de la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\varepsilon} e^{ikx} J_0(\alpha x)\, dx = \frac{1}{k} J_e\left(\frac{\alpha}{k}, k\varepsilon\right) \simeq 0$$

en outre :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{ikx} H_0(\alpha_x)\,dx = \frac{1}{k} He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right)\Big|_{\varepsilon}^{\infty} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2-k^2}} \arccos\dfrac{k}{\alpha} & \text{pour } \alpha = \alpha_j \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2-k^2}} \operatorname{arg\,sh}\dfrac{(\alpha^2-k^2)^{1/2}}{i\alpha} & \text{pour } \alpha = \beta_j \end{cases}$$

Nous tiendrons également compte des relations qui existent entre α_j et β_j avec α_j^2 et β_j^2 (les relations a, b, c, d, citées au chapitre II). Nous aboutissons à l'expression (11) (continuité de u à l'origine) :

$$\begin{aligned} u(o) = \frac{F}{D}\Big\{ &\sum_j -\frac{1}{2\pi} a_j (k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4)\left(\log\alpha_j - \frac{i\pi}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_j \operatorname{Re}\left[b_j (k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\left(\log\beta_j - \frac{i\pi}{2}\right)\right] + \\ &+ \frac{i\omega^2\sigma}{2\pi}\sum_j a_j (\alpha_j^2-k^2)^{1/2} \arccos\frac{k}{\alpha_j} + \\ &+ \frac{\omega^2\sigma}{\pi}\sum_j \operatorname{Re}\left[b_j (\beta_j^2-k^2)^{1/2} \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{(\beta_j^2-k^2)^{1/2}}{-i\beta_j}\right)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

(b) Expression de $\frac{\partial u}{\partial r}$ à l'origine.

Par dérivation de (10) et en tenant compte des approximations connues

$$J_1(\alpha\varepsilon) \simeq \alpha\frac{\varepsilon}{2}, \qquad Y_1(\alpha\varepsilon) \simeq \frac{1}{\alpha\varepsilon}$$

on aboutit à :

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=o} = \frac{F}{D}\left\{-\frac{2\omega^2\sigma}{4\pi}\sum a_j (k^2-\alpha_j^2)\log\alpha_j - \frac{\omega^2\sigma}{\pi}\sum b_j (k^2-\beta_j^2)\log\beta_j\right\}$$

expression montrant la continuité de $\frac{\partial u}{\partial r}$ à l'origine.

(c) Expression de $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ à l'origine.

De façon analogue, tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\Big|_{r=o} = \frac{F}{D}\Big\{ &\frac{i}{4}\sum_j a_j (k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4)\left(-\alpha_j^2 - \frac{2i}{\pi}\alpha_j\log\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2i}{\pi}\log\alpha_j\right) \\ &+ \frac{i}{2}\sum_j \operatorname{Re}\left[b_j (k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\left(-\beta_j^2 - \frac{2i}{\pi}\alpha_j\log\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2i}{\pi}\log\beta_j\right)\right. \\ &- \frac{i\omega^2\sigma}{4\pi}\sum_j a_j (\alpha_j^2-k^2)^{1/2}\alpha_j^2 \arccos\left(\frac{k}{\alpha_j}\right) \\ &\left. - \frac{2i\omega^2\sigma}{4\pi}\sum_j \operatorname{Re}\left[b_j (\beta_j^2-k^2)^{1/2}\beta_j^2 \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{(\beta_j^2-k^2)^{1/2}}{-i\beta_j}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Comme on le voit cette expression est singulière comme $\log \varepsilon$.

(d) Expression de $\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}$ à l'origine.

Cette expression se calcule immédiatement, soit :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{F}{D}\Big\{ -\frac{i}{4}\sum_j a_j (k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4)\,\frac{\alpha_j}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\sum \mathrm{Re}\Big[b_j (k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\,\frac{\beta_j}{\varepsilon}\Big]$$

$$-\frac{i\omega^2\sigma}{4}\sum_j a_j (k^2-\alpha_j^2)\Big[\frac{5i\alpha_j^2}{\pi}\log\alpha_j - \frac{2ik^2}{\pi}\log\alpha_j\Big]$$

$$-\frac{2i\omega^2\sigma}{4}\sum_j \mathrm{Re}\big[b_j (k^2-\beta_j^2)\big]\Big[\frac{5i\beta_j^2}{\pi}\log\beta_j - \frac{2ik^2}{\pi}\log\beta_j\Big]\Big\}$$

expression qui est singulière comme $\frac{1}{\varepsilon}$.

On voit donc que u se comporte bien à l'origine comme le noyau de l'équation des plaques dans le vide.

III.2.- Comportement asymptotique de u à l'infini.

On démontre également que l'expression de u donné par (10) se comporte asymptotiquement à l'infini comme le noyau de l'équation des plaques dans le vide, c'est-à-dire qu'il a également une décroissance en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ pour $r \to \infty$.

L'expression de $u\,(r \to \infty)$ est un peu plus délicate à obtenir. Elle fait tout d'abord intervenir des développements asymptotiques des fonctions de Schwarz [appendice I] à savoir :

$$(12)\quad \frac{1}{k}\,\mathrm{He}\Big(\frac{\alpha}{k}, kx\Big)\Big|_{r\to\infty}^{\infty} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\;\frac{e^{i[(k+\alpha)r+\pi/4]}}{(k+\alpha)\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{Je}\Big(\frac{\alpha}{k}, kr\to\infty\Big) \simeq \int_0^{\infty}\Big(e^{ikt}J_0(\alpha t) - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha}}\,\frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\Big)\,dt$$

$$(13)\quad -i\,\frac{e^{i[(k+\alpha)r-\pi/4]}}{\sqrt{2\pi\alpha}\,(k+\alpha)\sqrt{r}} - i\,\frac{e^{i[(k-\alpha)r+\pi/4]}}{\sqrt{2\pi\alpha}\,(k-\alpha)\sqrt{r}} + \frac{(1+i)\sqrt{2\pi}\;e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi\alpha}\,\sqrt{(k-\alpha)}}$$

On démontre ensuite que les β_j^2 et α_1^2 sont les racines de :

$$Q_1 = (X^2 - \lambda^4)(X - k^2)^{1/2} - \omega^2\sigma = Q_2 - 2\omega^2\sigma$$

où α_1^2 est la racine réelle $> k^2$ et $>\lambda^2$ et les $\alpha_{j\neq 1}^2$ lorsqu'ils existent sont les racines réelles de :

$$Q_2 = (X^2 - \lambda^4)(X - k^2)^{1/2} + \omega^2\sigma = Q_1 + 2\omega^2\sigma$$

d'où on obtient :

$$a_1 = \frac{1}{Q_2(x)\,|\,Q_1'(x)\,|_{x=\alpha_1^2}} = \frac{(\alpha_1^2 - k^2)^{1/2}}{\omega^2\sigma}\,[4\alpha_1^2(\alpha_1^2 - k^2) + \alpha_1^4 - \lambda^4]^{-1}$$

$$b_j = \frac{(\beta_j^2 - k^2)^{1/2}}{\omega^2\sigma}\,[4\beta_j^2(\beta_j^2 - k^2) + \beta_j^4 - \lambda^4]^{-1}$$

et

$$a_{j\neq 1} = -\frac{(\alpha_j^2 - k^2)^{1/2}}{\omega^2\sigma}\,[4\alpha_j^2(\alpha_j^2 - k^2) + \alpha_j^4 - \lambda^4]^{-1}$$

En tenant compte des égalités citées et ne conservant que les termes qui décroissent en $r^{-1/2}$, on obtient

$$(14) \qquad u(r\to\infty) \simeq \frac{F}{D}\,\frac{(\alpha_1^2 - k^2)^{1/2}}{[4\alpha_1^2(\alpha_1^2 - k^2) + \alpha_1^4 - \lambda^4]}\,\frac{i\,e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\alpha_1}}\,\frac{e^{i\alpha_1 r}}{\sqrt{r}}$$

$$\alpha_1^2 > k^2 \text{ et } > \lambda^2$$

Expression dans laquelle on remarque que seule l'onde correspondant à α_1 donne une contribution notable dans le développement asymptotique de u.

L'expression (14) est importante, car elle permet de calculer la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans la plaque.

III.3. Remarque.

Il est intéressant de démontrer que, quand le fluide "s'évanouit" (10) redonne bien l'expression de u pour une plaque infinie dans le vide, soit $u = -\frac{iF}{8\lambda^2 D}\,[H_0(i\lambda r) - H_0(\lambda r)]$.

Le passage à la limite est assez délicat; on peut démontrer que ce passage s'obtient à partir d'une dérivation.

On peut écrire :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{(X - X_1)(X - X_2)(X - X_3)(X - X_4)(X - X_5)}$$

où X_1 à X_5 sont les racines de Q (polynome de 5ème degré).

Quand $\sigma \to o$ ($\sigma = \frac{\rho}{D}$, ρ = la masse volumique du fluide) on sait que deux racines doivent tendre vers λ^2 et deux autres vers $-\lambda^2$ et la cinquième tendre vers $k \to o$ (rappelons que pour la décomposition faite au chapitre (2) nous avons noté par β_j^2 les racines complexes du polynome de parties imaginaire positive et par β_j les racines carrées de β_j^2 situées dans le premier quadrant). Supposons qu'à la limite $X_1 \to k \to o$, $(X_2$ et $X_3) \to \lambda^2$ et $(X_4$ et $X_5) \to \lambda^2$, alors :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{(X - X_1) \prod_{i \neq 1} (X_1 - X_i)} + \frac{1}{(X - X_2) \prod_{i \neq 2} (X_2 - X_i)} + \frac{1}{(X - X_3) \prod_{i \neq 3} (X_3 - X_i)} +$$

$$+ \frac{1}{(X - X_4) \prod_{i \neq 4} (X_4 - X_i)} + \frac{1}{(X - X_5) \prod_{i \neq 5} (X_5 - X_i)}$$

à la limite quand $X_1 \to o$, $X_2 \to X_3$ et $X_4 \to X_5$ on peut écrire :

$$\lim_{\sigma \to o} \frac{1}{Q} = \frac{1}{(X - X_1) \prod_{i \neq 1} (X_1 X_i)} + \lim_{X_2 \to X_3} \frac{1}{(X_2 - X_3 \prod_{\substack{i \neq 2 \\ i \neq 3}} (X_2 - X_i)} \left(\frac{1}{X - X_3} - \frac{1}{X - X_2} \right)$$

$$+ \lim_{X_4 \to X_5} \frac{1}{(X_4 - X_5) \prod_{\substack{i \neq 4 \\ i \neq 5}} (X_4 - X_i)} \left(\frac{1}{X - X_5} - \frac{1}{X - X_4} \right) = \frac{1}{\prod_{\substack{i \neq 2 \\ i \neq 3}} (X_2 - X_i)} \frac{\delta}{\delta Y} \left(\frac{1}{X - Y} \right) \Big|_{Y = \lambda^2} +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{\substack{i \neq 4 \\ i \neq 5}} (X_4 - X_i)} \frac{\delta}{\delta Y} \left(\frac{1}{X - Y} \right)_{Y = -\lambda^2}$$

Ce raisonnement montre qu'une simple dérivation des termes de (10) par rapport à la racine correspondante nous donne à la limite :

$$u = \frac{F}{D} \left\{ \frac{\delta}{\delta \alpha_j^2} \sum_j \frac{i}{4} a_j (k^2 - \alpha_j^2)(\lambda^4 - \alpha_j^4) H_0(\alpha_j r) \Big|_{\alpha_j^2 = \lambda^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_j I_m \left[b_j (k^2 - \beta_j^2)(\lambda^4 - \beta_j^4) H_0(\beta_j r) \Big|_{\beta_j^2 = -\lambda^2} \right] \right\} = - \frac{i F}{8 \lambda^2 D} \left[H_0(i \lambda r) - H_0(\lambda r) \right]$$

Evidemment les termes multipliés par σ s'annulent avec σ et les valeurs de a_j et b_j se calculent directement ainsi :

$$a_j = \lim_{X_2 \to X_3} \frac{1}{\prod_{\substack{i\neq 2 \\ i\neq 3}} (X_2 - X_i)} = \frac{1}{(X_2 - 0)(X_2 + \lambda^2)(X_2 + \lambda^2)} \Big|_{X_2 = \lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^6}$$

et

$$b_j = \lim_{X_4 \to X_5} \frac{1}{\prod_{\substack{i\neq 4 \\ i\neq 5}} (X_4 - X_i)} = \frac{1}{(X_4 - 0)(X_4 - \lambda^2)(X^2 - \lambda^2)} \Big|_{X_4 = -\lambda^2} = -\frac{1}{4\lambda^6}$$

Ainsi avec quelques précautions apportées au passage à la limite quand le fluide s'évanouit, on retrouve bien l'expression de u pour une plaque infinie dans le vide.

Quand le polynôme Q possède une (ou deux) racine double, par le procédé ci-dessus une simple dérivation de (10) par rapport à la racine double donne l'expression de u pour ce cas.

- CHAPITRE IV -

IV. CHAMP ACOUSTIQUE, SON COMPORTEMENT A L'INFINI ET SA VALEUR SUR LA PLAQUE.

Un 2ème paramètre intéressant dans le problème du couplage entre une structure vibrante et un fluide est le champ acoustique crée par la structure dans le fluide. Il est donc utile de connaître le champ acoustique rayonné par la plaque dans le fluide, son comportement asymptotique à l'infini, et sa valeur sur la plaque.

IV.1. Expression du champ acoustique rayonné dans le fluide.

Le potentiel des vitesses a pour expression :

$$(14') \qquad \varphi(M) = 2i\omega \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr(M-P)}}{4\pi r(M-P)} u(P)dP \quad \text{où} \quad \begin{cases} M \in \Omega \\ P \in \Sigma \end{cases}$$

où r est la distance entre deux points $M(\rho, \varphi, \theta)$ et $P(r, \varphi_o, 0)$. Certains auteurs ont cherché φ séparable en coordonnées cylindriques et ils ont aboutit à des résultats qui nous semblent erronnés (en particulier le potentiel des vitesses singulier sur l'axe z). Nous avons cherché φ séparable en coordonnées sphériques le seul système possible pour ce problème. Nous utilisons donc le développement de $\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ en série d'harmoniques sphériques [31], soit :

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{ik}{8\pi} \sum_{n=o}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=o}^{n} \varepsilon_m \cos(\varphi-\varphi_o) P_n^m(0) P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} j_n(k\rho) h_n(kr) & \rho<r \\ h_n(k\rho) s_n(kr) & \rho>r \end{cases}$$

où j_n et h_n sont les fonctions Bessel et Hanckel sphériques

$P_n^m(0)$ = fonction de Legendre

et

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ = angle entre l'axe de z et la direction du point M.

Nous trouvons donc Φ sous la forme :

$$(15)\quad \Phi(M) = -\frac{k\omega}{2D}\,\frac{F}{D}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n^0(0)\,P_n^0(\cos\theta)\Bigg\{\frac{i}{4}\sum_j a_j(k^2-\alpha_j^2)(\lambda_j^4-\alpha_j^4)$$

$$\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}H_0(\alpha_j r)\,j_n(kr)\,r\,dr + j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty}H_0(\alpha_j r)\,h_n(kr)\,r\,dr\Big] + \frac{i}{4}\sum b_j(k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)$$

$$\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}H_0(\beta_j r)\,j_n(kr)\,r\,dr + j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty}H_0(\beta_j r)\,h_n(kr)\,r\,dr\Big] + \frac{i}{4}\sum \bar{b}_j(k^2-\beta_j^{-2})(\lambda^4-\beta_j^{-4})$$

$$\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}\Big[H_0(-\bar{\beta}_j r)\,j_n(kr)\,r\,dr + j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty}H_0(-\bar{\beta}_j r)\,h_n(kr)\,r\,dr\Big] - \frac{i\omega^2\sigma}{4k}\sum a_j(k^2-\alpha_j^2)$$

$$\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}\Big[\Big(H_0(\alpha_j r)\,j_e\Big(\frac{\alpha_j}{k},kr\Big) + J_0(\alpha_j r)\,He\Big(\frac{\alpha_j}{k},kx\Big)\Big|_r^{\infty}\Big)\Big]\,j_n(kr)\,r\,dr +$$

$$+ j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty}\Big[\Big(H_0(\alpha_j r)\,Je\Big(\frac{\alpha_j}{k},kr\Big) + J_0(\alpha_j r)\,He\Big(\frac{\alpha_j}{k},kx\Big)\Big|_r^{\infty}\Big)\Big]\,h_n(kr)\,r\,dr\Big]$$

$$-\frac{i\omega^2\sigma}{4k}\sum_j b_j(k^2-\beta_j^2)\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}\Big[H_0(\beta_j r)\,Je\Big(\frac{\beta_j}{k},kr\Big) + J_0(\beta_j r)\,He\Big(\frac{\beta_j}{k},kx\Big)\Big|_r^{\infty}\Big)\Big]$$

$$j_n(kr)\,r\,dr + j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty}\Big[H_0(\beta_j r)\,Je\Big(\frac{\beta_j}{k},kr\Big) + J_0(\beta_j r)\,He\Big(\frac{\beta_j}{k},kx\Big|_r^{\infty}\Big)\Big]\,h_n(kr)\,r\,dr\Big]$$

$$-\frac{i\omega^2\sigma}{4k}\sum_j \bar{b}_j(k^2-\bar{\beta}_j^2)\Big[h_n(k\rho)\int_0^{\rho}\Big[H_0(-\bar{\beta}_j r)\,Je\Big(\frac{-\bar{\beta}_j}{k},kr\Big) + J_0(-\bar{\beta}_j r)\,He\Big(\frac{-\bar{\beta}_j}{k},kx\Big)\Big|_r^{\infty}\Big]$$

$$j_n(kr)\,r\,dr + j_n(kr)\int_{\rho}^{\infty}\Big[H_0(-\bar{\beta}_j r)\,Je\Big(\frac{-\bar{\beta}_j}{k},kr\Big) + J_0(-\bar{\beta}_j r)\,He\Big(\frac{-\bar{\beta}_j}{k},kx\Big)\Big|_r^{\infty}\Big)\Big]\,h_n(kr)\,r\,dr\Bigg\}$$

à partir de (15) on peut donner le développement asymptotique de Φ à l'infini.

IV.2. Comportement asymptotique de Φ à l'infini.

Portons dans l'expression (15) le développement asymptotique des fonctions de Bessel et Hanckel sphériques et cylindriques et des fonctions de Schwarz (annexe 2.1); en ne conservant que les termes qui décroissent le moins vite, c'est-à-dire en $\frac{1}{\rho}$, on trouve :

$$(16)\quad \varphi(r\to\infty,\theta) \simeq -\frac{F}{D}\,\pi\omega\,\frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}\sum_{m=o}^{\infty}(4m+1)\,\frac{2m!}{2^{2m}m!}\,P^{o}_{2m}(\cos\theta)\Big\{\sum_j a_j(k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4)$$

$$\Big[\int_o^\infty j_{2m}(kr)H_o(\alpha_j r)+2i\sum_j \mathrm{Im}\Big[b_j(k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\int_o^\infty j_{2m}(kr)J_o(\beta_j r)\,r\,dr\Big]+$$

$$+\frac{\omega^2\sigma}{4k}\sum_j a_j(k^2-\alpha_j^2)\int_o^\infty\Big[j_{2m}(kr)J_o(\alpha_j r)\,He\Big(\frac{\alpha_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty+\frac{(-1)^m}{2\pi\alpha_j(k+\alpha_j)}\,\frac{e^{-1/r}}{r^2}\Big]\,r\,dr$$

$$+\frac{\omega^2\sigma}{4k}\sum_j b_j(k^2-\beta_j^2)\int_o^\infty\Big[j_{2m}(kr)J_o(\beta_j r)\,He\Big(\frac{\beta_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty\frac{(-1)^m}{2\pi\beta_j(k+\beta_j)}\,\frac{e^{-1/r}}{r^2}\Big]\,r\,dr$$

$$-\frac{\omega^2\sigma}{4k}\sum\bar b_j(k^2-\bar\beta_j^2)\int_o^\infty\Big[j_{2m}(kr)J_o(-\bar\beta_j r)\,He\Big(\frac{-\bar\beta_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty-\frac{(-1)^m}{2\pi\bar\beta_j(k-\bar\beta_j)}\,\frac{e^{-1/r}}{r^2}\Big]r\,dr\Big\}$$

Le potentiel des vitesses donné par (16) à l'infini se comporte comme le champ acoustique d'une source ponctuelle multipolaire.

IV.3. Expression du champ acoustique sur Σ.

Il est également possible d'exprimer le champ acoustique sur la plaque. Le calcul se fait directement à partir de (14') écrivons la transformée de Fourier de φ, soit :

$$\hat\varphi=\frac{F}{D}\,\frac{i\omega}{(4\pi^2\xi^2-k^2)^{1/2}}\Big[\sum_j\frac{a_j(k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4)}{4\pi^2\xi^2-\alpha_j^2}+2\sum_j\mathrm{Re}\Big[\frac{b_j(k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)}{4\pi^2\xi^2-\beta_j^2}\Big]$$

$$+\frac{F}{D}\,i\omega^3\sigma\Big\{\sum_j\frac{a_j}{4\pi^2\xi^2-\alpha_j}+2\sum\mathrm{Re}\Big[\frac{b_j}{4\pi^2\xi^2-\beta_j^2}\Big]\Big\}$$

Cette expression s'inverse facilement sous la forme:

$$\varphi(z=0,r)=-\frac{F}{D}\,\frac{\omega^3\sigma}{4}\Big\{\sum_j a_j H_o(\alpha_j r)+2i\sum\mathrm{Im}\big[b_j H_o(\beta_j r)\big]\Big\}-$$

$$-\frac{F}{D}\,\frac{\omega}{4k}\Big\{\sum_j a_j(k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\Big[H_o(\alpha_j r)\,Je\Big(\frac{\alpha_j}{k},kr\Big)+J_o(\alpha_j r)\,He\Big(\frac{\alpha_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty\Big]$$

$$+\sum_j b_j(k^2-\beta_j^2)(\lambda^4-\beta_j^4)\Big[H_o(\beta_j r)\,Je\Big(\frac{\beta_j}{k},kr\Big)+J_o(\beta_j r)\,He\Big(\frac{\beta_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty\Big]$$

$$+\sum_j\bar b_j(k^2-\bar\beta_j^2)(\lambda^4-\bar\beta_j^4)\Big[H_o(-\bar\beta_j r)\,Je\Big(\frac{-\bar\beta_j}{k},kx\Big)+J_o\Big(\frac{-\bar\beta_j}{k},kx\Big)\Big|_r^\infty\Big]\Big\}$$

Il apparait, comme dans u, soit une onde progressive et deux ondes stationnaires, soit trois ondes progressives et une onde stationnaire.

- CHAPITRE V -

V. EXPRESSION DES PUISSANCES MOYENNES MISES EN JEU.

La connaissance des différentes puissances intervenant dans ce problème est un aspect physique important. Par exemple dans le cas de la transmission du son par une paroi, on définit le coefficient d'isolement par le rapport entre la puissance transmise à travers la paroi et la puissance incidente; ce coefficient d'isolement caractèrise acoustiquement la paroi; aussi la connaissance des différentes puissances intervenant dans le couplage d'une plaque infinie et un fluide nous permettent d'envisager des approximations justifiées pour les problèmes de couplage entre une plaque mince finie et un fluide.

V.1 - Rappel des définitions.

Rappelons donc les définitions connues des différentes puissances mises en jeu :

(a) Puissance totale moyenne admise par le système

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{Re}\left(F e^{-i\omega t}\right) \mathrm{Re}\left(-i\omega u(o)\, e^{-i\omega t}\right) dt = \frac{\omega}{2} F\, \mathrm{Im}\left(u(o)\right)$$

(b) Puissance moyenne rayonnée dans le fluide

$$P_F = \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Sigma \mathrm{Re}\left[-i\omega\rho \mathrm{Tr}\,(\varphi)\, e^{-i\omega t}\right] \mathrm{Re}\left(i\omega u\, e^{-i\omega t}\right) d\Sigma\, dt = \frac{\rho\omega^2}{2} \int_\Sigma \mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}\,(\varphi)\,\bar{u}\right] d\Sigma$$

(c) Puissance moyenne dissipée à l'infini dans la plaque

$$P_P = \int_0^T D \int_C \Big\{ \mathrm{Re}\left[\mathrm{Tr}\left(\partial_n \Delta u\right) + (1-\nu)\,\partial_s\left(\partial_n \partial_s u\right)\right) e^{-i\omega t}\right] \mathrm{Re}\left[-i\omega\, \mathrm{Tr}\,(u)\, e^{-i\omega t}\right]$$

$$- \mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{Tr}\left(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\right) e^{-i\omega t}\right] \mathrm{Re}\left[-i\omega\left(\mathrm{Tr}\left(\partial_n u\right) e^{-i\omega t}\right)\right]\right.\ dc\, dt = -\frac{\omega D}{2}$$

$$\int_C \mathrm{Im}\Big\{\left[\left(\partial_n \Delta u\right) + (1-\nu)\,\partial_s\left(\partial_n \partial_s u\right)\right] \mathrm{Tr}\left(\bar{u}\right) - \mathrm{Tr}\left[\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u\right] \mathrm{Tr}\left(\partial_n \bar{u}\right)\Big\}\, dc$$

V.2. Calcul de puissance totale moyenne admise par le système.

Cette puissance se calcule facilement à partir de (11), en effet on a :

$$I_m u(0) = \frac{F}{D}\left\{\frac{i}{4}\sum a_j (k^2-\alpha_j^2)(\lambda^4-\alpha_j^4) + \frac{i\omega^2\sigma}{2\pi}\sum a_j (\alpha_j^2-k^2)^{1/2} \arccos\left(\frac{k}{\alpha_j}\right)\right\}$$

remplaçons les a_j par leurs valeurs, nous avons :

$$(18)\quad P_T = \frac{F^2}{4\sqrt{Dm}}\lambda^2\left\{\sum_j \frac{\alpha_j^2-k^2}{4\alpha_j^2(\alpha_j^2-k^2)+\alpha_j^4-\lambda^4}\left[\operatorname{sgn}(\alpha_j-\lambda)\frac{\arccos\left(\frac{k}{\alpha_j}\right)}{\Pi} - \frac{1}{2}\right]\right\}$$

où $\operatorname{sgn}(\alpha_j-\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j > \lambda \\ 0 & \text{si } \alpha_j = \lambda \\ -1 & \text{si } \alpha_j < \lambda \end{cases}$

On peut démontrer qu'aux hautes fréquences on a :

$$(\alpha_j^2-k^2) = 0\left(\frac{1}{\omega^4}\right) \qquad \text{d'où} \qquad P_T = 0\left(\frac{1}{\omega^7}\right)$$

donc aux hautes fréquences la puissance totale admise par le système décroit en ω^{-7}.

V.3. Puissance moyenne dissipée à l'infini dans la plaque.

Elle se calcule à partir de (12). Ecrivons $u(r\to\infty)$ sous la forme :

$$u(r\to\infty) \simeq A\, i\, e^{-i\pi/4}\frac{e^{i\alpha_1 r}}{\sqrt{r}}, \quad \text{où} \quad A = \frac{F}{D}\frac{(\alpha^2-k^2)^{1/2}}{4\alpha_1^2(\alpha_1^2-k^2)}$$

alors $\Delta u \simeq A\alpha_1^2 e^{-i\pi/4}\frac{e^{i\alpha_1 r}}{\sqrt{r}} + 0\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)$

$$\partial_n \Delta u \simeq A\alpha_1^3 e^{-i\pi/4}\frac{e^{i\alpha_1 r}}{\sqrt{r}} + 0\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)$$

$$\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u = \partial_r^2 u + \frac{\nu}{r}\partial_r u = -A\, i\alpha_1^2 e^{-i\pi/4}\frac{e^{i\alpha_1 r}}{\sqrt{r}} + 0\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)$$

et $\partial_s \operatorname{Tr}(\partial_n \partial_s u) = 0$

Nous repportant à l'expression de la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans la

plaque donnée plus haut, tous calculs faits on trouve :

$$(19) \qquad P_P = \frac{F^2}{4\sqrt{Dm}} \; \frac{4\lambda^2 \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - k^2)^2}{[4\alpha_1^2 (\alpha_1^2 - k^2) + \alpha_1^4 - \lambda^4]^2}$$

Aux hautes fréquences on peut démontrer que la puissance rayonnée à l'infini dans la plaque décroit en (ω^{-13})

$$P_P = 0 \; (\frac{1}{\omega^{13}})$$

ce qui veut dire qu'aux hautes fréquences la quasi totalité de la puissance totale moyenne admise par le système est rayonnée dans le fluide.

V.4. Puissance moyenne rayonnée dans le fluide.

L'application du principe de conservation d'énergie pour ce problème nous permet d'exprimer la puissance moyenne rayonnée par la plaque dans le fluide par :

$$(20) \qquad P_F = P_T - P_P \cdot$$

Remarque.

Il est inutile de chercher à calculer la puissance moyenne rayonnée dans le fluide à partir (V.1.(b)), car dans cette formule on peut toujours remplacer $(Tr\Phi)$ par sa valeur obtenue à partir de l'équation intégro-différentiel (6), et on retrouve alors (20). Même si la solution u n'est pas bien choisie on vérifie toujours (20); mais alors on pourra avoir par exemple $P_P < 0$, $P_F < 0$, $P_T = \infty \ldots$, ce qui n'a plus de sens physique.

Nous avons démontré qu'aux hautes fréquences la puissance moyenne totale admise par le système $(0\,(\frac{1}{\omega^7}))$ est supérieure à la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans la plaque $(0\,(\frac{1}{\omega^{13}}))$. On peut démontrer également qu'aux basses fréquences la puissance moyenne totale admise par le système est supérieure à la puissance moyenne rayonnée à l'infini dans la plaque. Pour démontrer analytiquement cette relation aux moyennes fréquences il nous faudrait l'expression analytique des racines de polynôme Q , nous l'avons cependant constaté au moyen d'un calcul numérique.

V.5. Remarque importante.

De nombreux auteurs ont cherché à calculer la puissance moyenne rayonnée dans le fluide à partir de la formule

$$(20') \qquad P_F = \frac{\omega^2 \rho}{2} \; 2\pi \int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\hat{\Phi}(\xi)\, \bar{\hat{u}}(\xi)\right] \xi \, d\xi$$

Cette formule est une conséquence de la formule de Parseval, soit :

$$2\pi \int_0^\infty \varphi(r)\,\bar{u}(r)\,r\,dr = 2\pi \int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi)\,\bar{\hat{u}}(\xi)\,\xi\,d\xi$$

Mais, même si les deux intégrales sont convergentes, elles ne sont généralement pas égales [26],(on ne peut être assuré de l'égalité que si φ et u sont de modules carrés sommables, ce qui n'est pas le cas ici).

On a :

$$2\pi \int_0^\infty \mathrm{Re}\,(\hat{\varphi}(\xi)\,\bar{\hat{u}}(\xi)\,\xi\,d\xi = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{Re}\,\left[\frac{i\omega\,|\hat{u}|^2\,\xi\,d\xi}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}\right]$$

car

$$\hat{\varphi} = \frac{i\omega}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}\,\hat{u}$$

donc :

$$\hat{\varphi}\,\bar{\hat{u}} = \frac{i\omega}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}\,|\hat{u}|^2$$

La transformée de Fourier de u est donnée au (II.1). On en tire :

$$|\hat{u}|^2 = \frac{F^2}{D^2}\,\frac{(4\pi^2\xi^2 - k^2)}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)^2\,(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\sigma^2}$$

et $\mathrm{Re}\,(\hat{\varphi}\,\hat{u}) = \mathrm{Re}\left[\dfrac{i\omega F^2}{D^2\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}\,\dfrac{(4\pi^2\xi^2 - k^2)}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)^2\,(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\sigma^2}\right]$

soit pour $4\pi^2\xi^2 < k^2$

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\,(\hat{\varphi}\,\hat{u})\,\xi\,d\xi = \int_0^\infty \frac{F^2}{D^2}\,\frac{\omega\,(4\pi^2\xi^2 - k^2)^{1/2}\,\xi\,d\xi}{[(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)^2\,(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\sigma^2]} = \frac{F}{D\omega\sigma}\,I_m(u)$$

car $\hat{u} = \dfrac{F}{D}\,\dfrac{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)(4\pi^2\xi^2 - k^2) + \omega^2\sigma\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\sigma^2}$

Donc:

$$I_m(\hat{u}) = \frac{F}{D}\,\frac{\omega^2\sigma\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)(4\pi^2\xi^2 - k^2) - \omega^4\sigma^2} \quad \text{pour } 4\pi^2\xi^2 < k^2$$

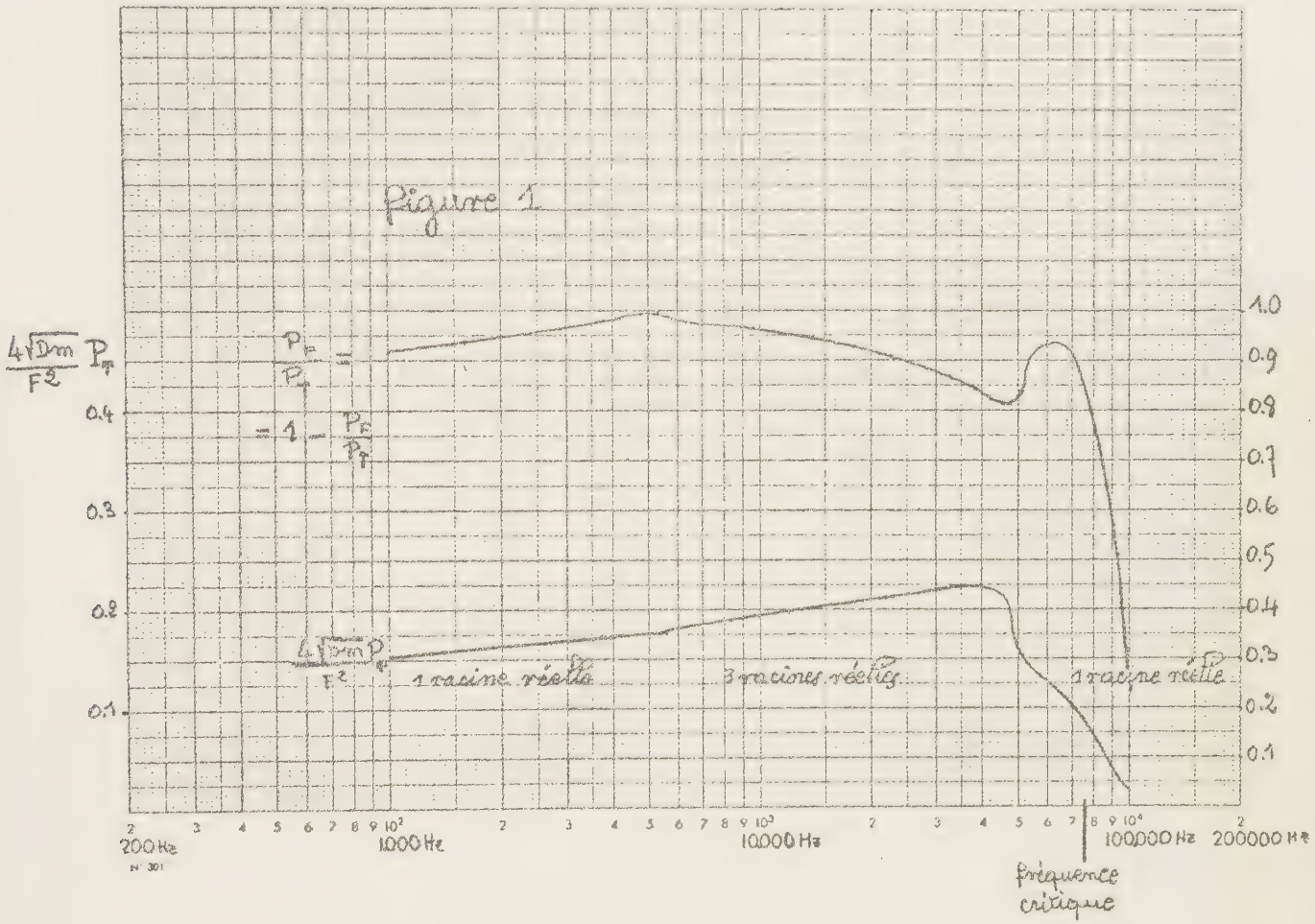
évidemment pour $4\pi^2\xi^2 > k^2$, $\mathrm{Re}\,(\hat{\varphi}\,\hat{u}) = 0$

donc : $P_F = \dfrac{\omega^2\rho}{2}\,2\pi \int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\hat{\varphi}(\xi)\,\bar{\hat{u}}(\xi)\right]\xi\,d\xi = \dfrac{F\omega}{2}\,I_m(u) = P_T$

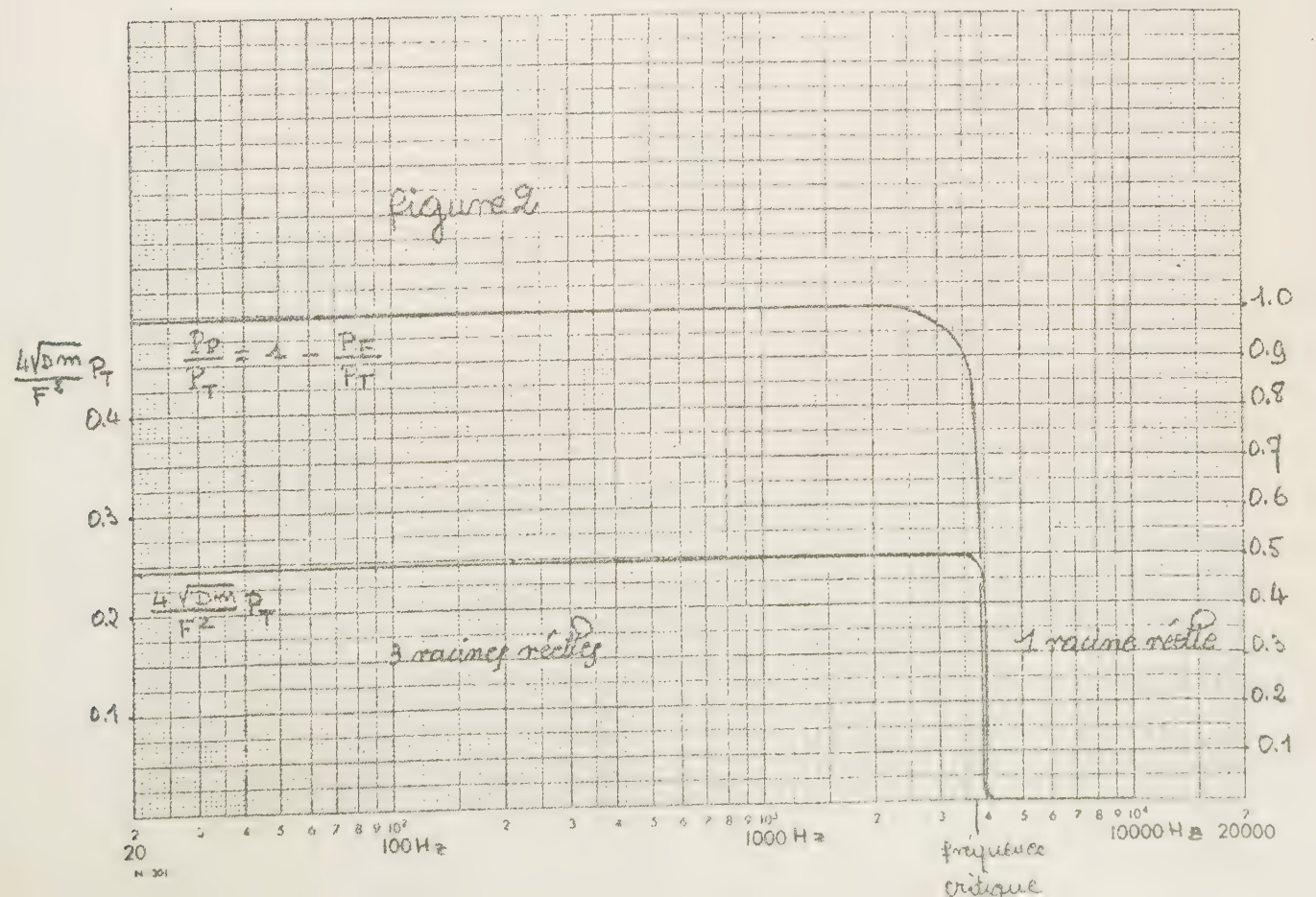
La formule de Parseval appliquée dans ce problème conduirait à écrire l'égalité entre la puissance moyenne totale admise par le système et la puissance moyenne rayonnée dans le fluide. Ce qui à peu près vérifié cependant aux hautes fréquences comme nous l'avons démontré.

Certains auteurs en appliquant la formule de Parseval et en faisant des intégrations approchées trouvent aux hautes fréquences une puissance moyenne rayonnée dans le fluide constant, tandis que la puissance moyenne totale admise par le système décroit en $(\frac{1}{\omega^7})$; un tel résultat n'est pas cohérent.

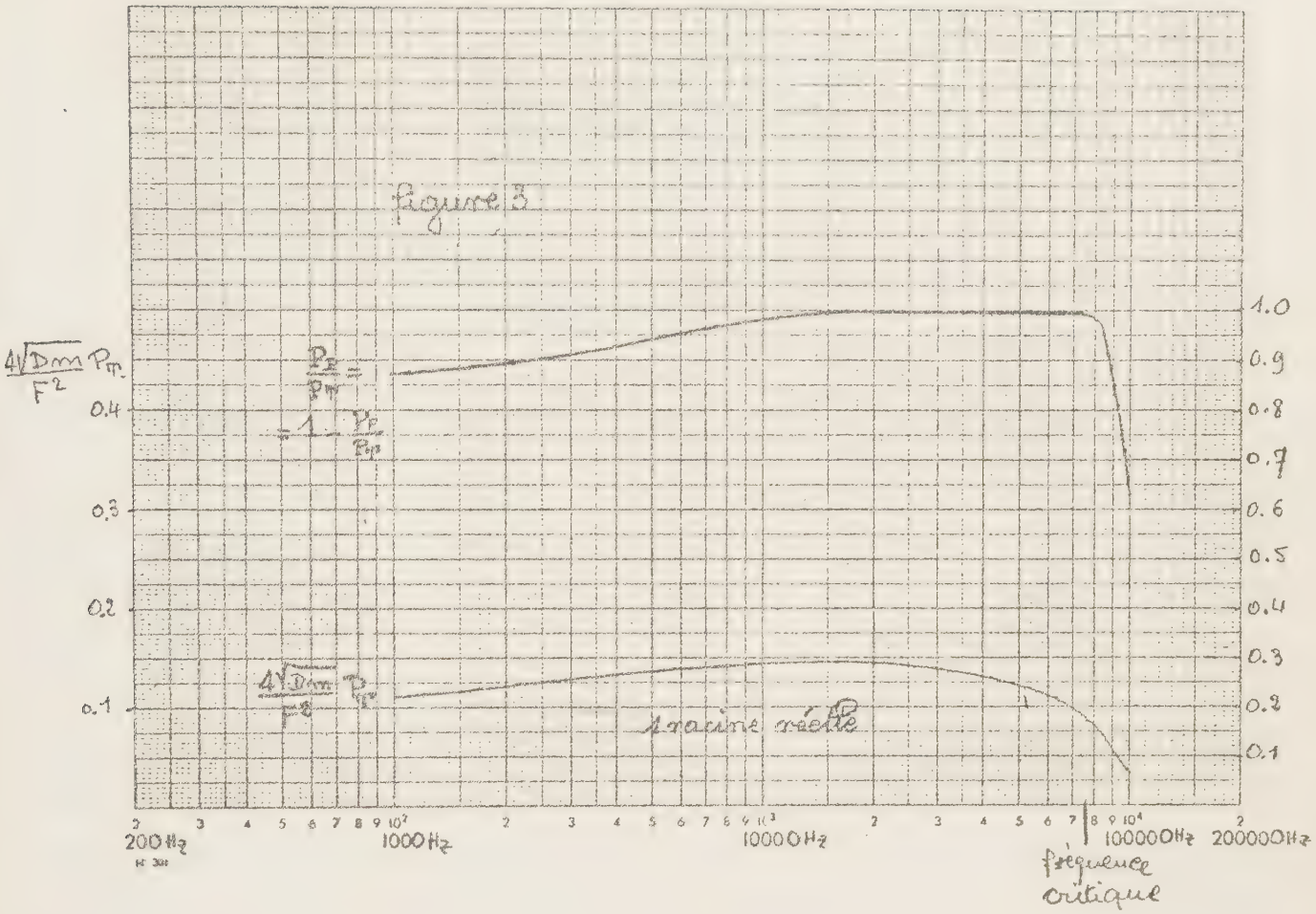
acier 3mm - eau



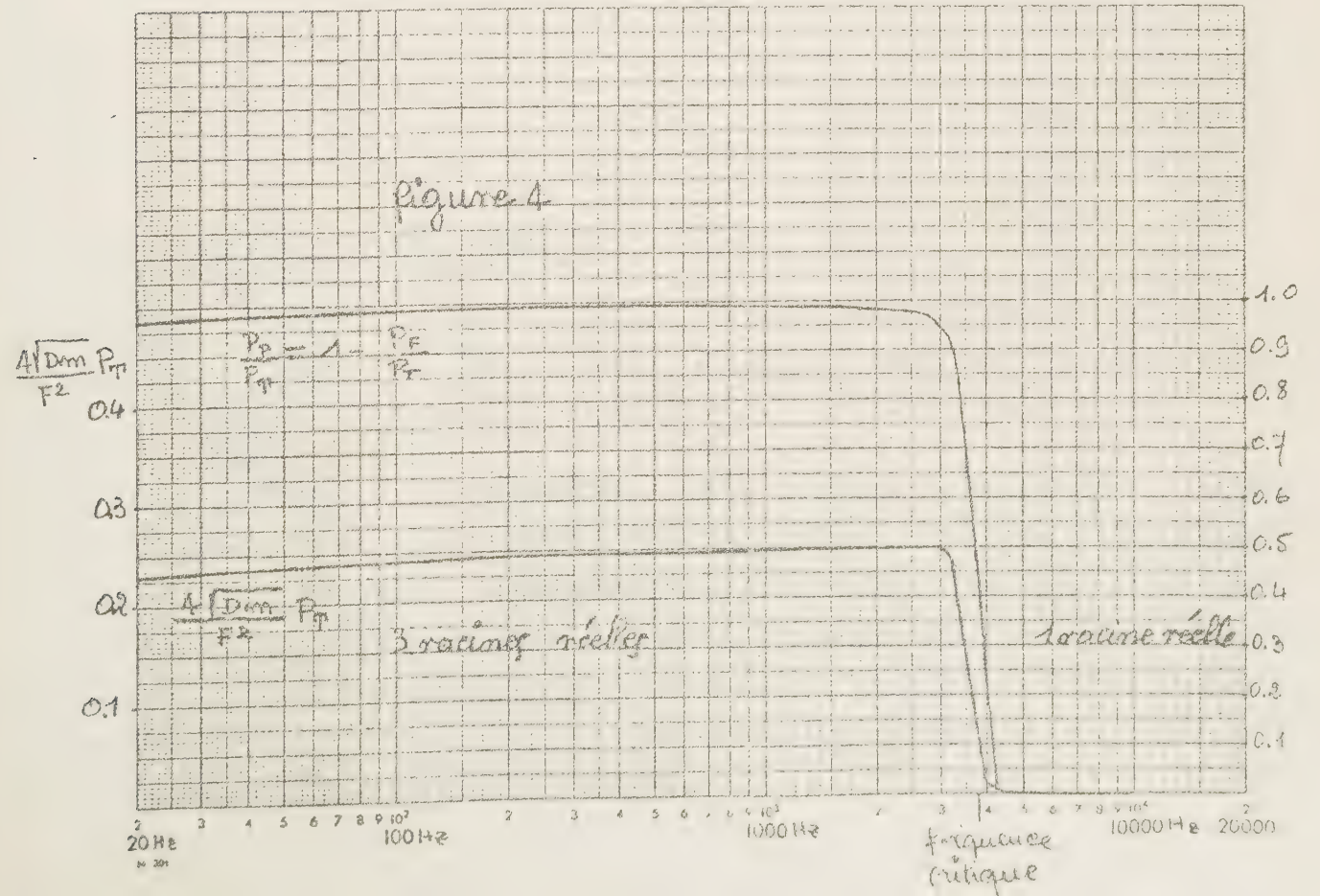
acier 3mm - air



duralumin 5 mm - eau



duralumin 3 mm - air



- CHAPITRE VI -

EXEMPLES ET CONCLUSION

VI.1. Exemple.

A titre d'exemple, nous avons effectué le calcul des différentes puissances mises en jeu dans différents cas : plaque acier ou duralumin de 3mm d'épaisseur, couplée avec de l'eau d'un seul côté ou de l'air des deux côtés. Les résultats sont consignés dans les courbes 1 à 4.

On constate que, qualitativement, les courbes obtenues dans ces 4 cas sont très semblables, la courbe correspondante au couplage acier-eau étant cependant plus accidentée (présence dans une certaine bande de fréquence de 3 racines réelles). En dessous de la fréquence critique $\lambda > k$ la quasi-totalité de la puissance admise par le système reste dans la plaque; au-delà de cette fréquence $\lambda < k$ la quasi-totalité de la puissance admise est rayonnée dans le fluide.

Conservant le couplage avec l'air on voit que, au-dessous de la fréquence critique, la plaque se comporte pratiquement comme si elle était dans le vide (pour une plaque dans le vide on aurait $P_1 = 0,25 \frac{F^2}{4\sqrt{Dm}}$ par contre le couplage avec de l'eau a une forte influence sur le comportement de la plaque comme au-dessus de la fréquence critique.

VI.2. Conclusion de la première partie.

Nous avons mis en évidence la solution formelle du problème du couplage entre une plaque mince infinie et un fluide, et nous avons donné des résultats complets. Ces résultats sont à notre connaissance nouveaux :

(a) Un exemple de calcul numérique des expressions des différentes puissances mises en jeu confirme les résultats partiels déjà connus. On distingue deux comportements différents du système : Au-dessous de la fréquence critique ($k < \lambda$) le système admet une énergie importante (dans l'air, puissance totale admise $\simeq$ puissance admise par la plaque dans le vide) qui reste en quasi-totalité dans la plaque; Au-dessus de la fréquence critique ($k > \lambda$) la puissance totale admise qui décroit en ω^{-7} est en quasi-totalité rayonnée dans le fluide.

(b) Nous avons démontré que l'élongation de la plaque couplée comporte à l'origine et à l'infini comme le noyau élémentaire de l'équation des plaques dans le vide ; en outre quand le fluide "s'évanouit" on retrouve bien l'expression de l'élongation de la plaque infinie dans le vide. Ces remarques montrent que l'expression donné du déplacement de la plaque couplée correspond pour l'essentiel au déplacement de plaque dans le vide; c'est-à-dire que nous avons bien obtenu la solution d'une équation de plaque.

(c) Tous les problèmes de couplage entre les vibrations d'une plaque couplée avec un fluide sont pour l'essentiel tous équivalents. Aussi les résultats théoriques de l'étude que nous venons de développer doivent-ils nous permettrent de décrire correctement les paramètres importants qui régissent les mouvements d'une plaque finie couplée avec un fluide: En particulier ils nous fournissent la densité de modes propres et les fréquences propres de la plaque, c'est ce qui fait l'objet de la seconde partie.

Deuxième Partie

Plaque finie et vérifications expérimentales

INTRODUCTION

L'étude théorique du couplage en régime stationnaire entre une plaque mince homogène infinie et un fluide met en relief la solution exacte du problème, en particulier l'expression de la puissance moyenne totale admise par le système à partir de laquelle on peut donner immédiatement l'expression de la partie réelle de son admittance. Nous cherchons ici à vérifier ces résultats. Heckl [31] propose une formule liant la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie dans le vide à sa densité de modes propres, où, il suppose l'égalité entre la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie et infinie.

Il suggère que cette relation puisse être également vraie quand il y a couplage avec un fluide. Nous montrons que cette hypothèse est correctement vérifiée quand le rayonnement acoustique est faible. On a vu que le rayonnement acoustique prend de l'importance à partir de la fréquence critique, et alors il n'y a plus égalité entre la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie et celle de la plaque infinie; il est donc nécessaire d'apporter une correction à la partie réelle de l'admittance d'une plaque infinie pour obtenir celle de la plaque finie. Nous évaluons cette correction par le flux de puissance à travers un cercle de rayon r ayant la même surface que la plaque. A partir de la partie réelle de l'admittance d'une plaque ainsi calculée, nous proposons deux types d'études expérimentales:

1) vérification de la loi de densité de modes propres pour une plaque dans l'air d'une part, couplée avec de l'eau sur une face et de l'air sur l'autre d'autre part.

2) Détermination des fréquences de résonances d'une plaque couplée avec de l'eau par une face et de l'air par l'autre, connaissant les fréquences propres de la même plaque dans le vide.

En outre nous avons envisagé comme dernière application le calcul de la transparence au son d'une cloison. Nous confrontons la courbe d'indice d'affaiblissement tracé à partir de l'admittance théorique avec les courbes expérimentales et théoriques de F. Spronck. Les résultats montrent que notre théorie, qui ne nécessite qu'un temps de calcul faible, permet de faire une prévision satisfaisante de transparence.

- CHAPITRE VII -

Nous avons considéré dans la première partie, une plaque non dissipative mince, homogène, infinie, vibrant sous l'effet d'une force ponctuelle harmonique, couplée avec un fluide occupant les deux demi-espaces, et nous avons obtenu la solution exacte du problème.

Nous avons donné les expressions de la puissance moyenne totale P_T admise par le système et de la puissance moyenne dissipée à l'infini dans la plaque. Or, par définition, l'admittance est telle que :

$$P_T = \frac{F^2}{2} \, \mathrm{Re}\,(A)$$

où on désigne par :

Re (A) = la partie réelle de l'admittance du système

donc on en déduit à partir de [(18) première partie]

$$(21) \qquad \mathrm{Re}\,(A\infty) = \frac{1}{2\sqrt{Dm}} \lambda^2 \sum_j \frac{\alpha_j^2 - k^2}{4\alpha_j^2(\alpha_j^2 - k^2) + \alpha_j^4 \lambda^4} \left[\mathrm{sgn}\,(\alpha_j - \lambda) \frac{\cos\,(k/\alpha_j)}{\pi} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\mathrm{sgn}\,(\alpha_j - \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j > \lambda \\ 0 & \text{si } \alpha_j = \lambda \\ 1 & \text{si } \alpha_j < \lambda \end{cases}$$

où Re ($A\infty$) = la partie réelle de l'admittance du système infini "plaque infinie, fluide". On cherche à vérifier expérimentalement (21) pour une plaque finie.

Lorsque le rayonnement acoustique d'une plaque (non dissipative) est nul (plaque dans le vide), le flux de puissance à travers un cercle de rayon r (fini) est le même qu'à travers le cercle infini, donc il y a égalité des parties réelles des admittances d'une plaque finie et une plaque infinie. Mais lorsque la plaque se met à rayonner, les flux de puissance à travers ces deux cercles ne sont plus égaux, et l'égalité précédente n'est plus vraie. Pour une plaque limitée, nous sommes alors obligés de faire une correction pour le calcul de la partie réelle de son admittance.

Evaluons donc le flux de puissance moyenne à travers un cercle de rayon r assez grand, soit :

$$P_P = \frac{1}{T}\int_0^T D \int_0^{2\pi} \Big\{ \mathrm{Re}\big[(\mathrm{Tr}\,(\partial_n \Delta u) + (1-\nu)\,\partial_s\,\mathrm{Tr}\,(\partial_n \partial u))\,\bar{e}^{-i\omega t}\big]$$

$$\mathrm{Re}\big[-i\omega \mathrm{Tr}\,(u)\,e^{-i\omega t}\big] - \mathrm{Re}\big[\mathrm{Tr}\,(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2 u)\,e^{-i\omega t}\big]\,\mathrm{Re}\big[-i\omega \mathrm{Tr}(\partial_n u) e^{-i\omega t}\big]\Big\} r\,d\theta\,dt$$

en désignant par ∂_s et ∂_n les dérivées tangentielles et normales.

On porte l'expression de u donnée par (10) et on utilise les séries asymptotiques de fonctions de Bessel et de Schwarz.

Les différents termes de l'intégrale se calculant sous la forme :

$$\partial_n \Delta u.\bar{u} = \frac{F^2}{16 D^2} |a_1|^2 (\alpha_1^2 - k^2)^2 \Big[- \frac{16 i \alpha_1^2 \omega^4 \sigma^2}{2(\alpha^2 - k^2)\pi} \frac{1}{r} - \frac{8 \omega^4 \sigma^2}{\sqrt{2\pi\alpha_1}\,\pi\,(\alpha_1^2 - k^2)^{3}/2}$$

$$\left(\frac{\alpha^3 e^{i(\alpha_1 - k) r} e^{-i\pi/4}}{r^{3/2}} + \frac{k^3 e^{-i(\alpha_1 - k)} e^{i\pi/4}}{r^{3/2}} \right) - \frac{4\omega^4\sigma^2}{\pi(\alpha^2 - k^2)} \left(\frac{i k^3}{\pi(\alpha^2 - k^2)} \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \right) + \ldots \Big]$$

$$(\Delta u - (1-\nu)\partial_s^2)\,\partial_r \bar{u} = \frac{F^2}{16 D^2} (\alpha_1^2 - k^2)^2 \Big[\frac{16 i \alpha_1^2 \omega^4 \sigma^2}{2\pi(\alpha_1^2 - k^2)} \frac{1}{r} + \frac{8 \alpha_1 k \omega^4 \sigma^2}{\sqrt{2\pi\alpha_1}\,\pi\,(\alpha_1^2 - k^2)^{3}/2}$$

$$\left(\frac{\alpha_1 e^{i(\alpha_1 - k) r} e^{-i\pi/4}}{r^{3/2}} - \frac{k e^{-i(\alpha_1 - k)} e^{i\pi/4}}{r^{3/2}} \right) + \frac{4\omega^4\sigma^2}{\pi(\alpha_1^2 - k^2)} \left(\frac{i k^3}{\pi(\alpha_1^2 - k^2)} \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha(1-2\nu)}{r^2} \right) + \ldots$$

le cercle est supposé centré à l'origine de sorte que :

$\partial_s\,\mathrm{Tr}\,(\partial_n \partial_s) = 0$ donc tous calculs faits, on trouve :

$$(24)\quad P_{Pc} = P_{P\infty} \Big\{ 1 + \frac{(\alpha_1 + k)}{\sqrt{\pi\alpha}\,(\alpha_1^2 - k^2)^{1}/2} \Big[\Big(1 + \frac{k^2}{\alpha_1^2}\Big) \frac{\sin(\alpha_1 - k) r}{r^{1/2}} - \Big(1 + \frac{k^2}{\alpha_1^2}\Big) \frac{\cos(\alpha_1 - k) r}{r^{1/2}} \Big] +$$

$$+ \frac{k^3}{2\pi(\alpha_1^2 - k^2)\alpha_1^2} \frac{1}{r} \ldots \Big\}$$

Pour une plaque de dimension finie couplée avec un fluide, nous faisons deux approximations moyennant quoi, nous obtenons la partie réelle de son admittance.

1°) On peut estimer que le rapport de la puissance moyenne rayonnée dans la plaque de dimension finie ou infinie à la puissance moyenne totale admise par le système "plaque finie ou infinie" est égale au rapport de la partie réelle de l'admittance du système

"plaque finie ou infinie, fluide" à la partie réelle de l'admittance de la plaque dans le vide, soit :

$$(23) \qquad \frac{\tilde{P}_P}{\tilde{P}_T} \simeq \frac{Re(A_{cf})}{Re_{(A_V)}} \quad \text{et} \quad \frac{P_{P\infty}}{P_{T\infty}} \simeq \frac{Re\,(A_{c\infty})}{Re_{(A_V)}}$$

en désignant par :

$\tilde{P}_P$ = le flux de puissance moyenne à travers une plaque de dimension finie couplée

$\tilde{P}_T$ = la puissance moyenne totale admise par le système "plaque finie, fluide"

$P_{P\infty}$ = le flux de puissance moyenne à travers une plaque infinie couplée

$P_{T\infty}$ = la puissance moyenne totale admise par le système "plaque infinie, fluide"

$Re_{(A_V)}$ = la partie réelle de l'admittance d'une plaque dans le vide

$Re_{(A_{cf})}$ = la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie couplée

$Re_{(A_{c\infty})}$ = la partie réelle de l'admittance d'une plaque infinie couplée.

2°) On suppose qu'il y a égalité entre d'une part le rapport de la puissance moyenne qui reste dans une plaque finie à la puissance moyenne admise par le système "plaque finie fluide"; et d'autre part le rapport du flux de puissance moyenne à travers un cercle tracé sur la plaque infinie et de même surface que la plaque finie à la puissance admise par le système "plaque infinie, fluide", soit :

$$\frac{\tilde{P}_P}{\tilde{P}_T} \simeq \frac{P_{Pc}}{P_{T\infty}}$$

où

P_{Pc} = le flux de puissance moyenne à travers un cercle de rayon (r) tracé dans la plaque infinie ayant même surface que la plaque. Moyennant ces deux approximations, on obtient :

$$(25) \qquad Re\,(A_{cf}) \simeq Re\,(A_V) \times \frac{P_{Pc}}{P_{T\infty}}$$

on en déduit les expressions de $\tilde{P}_T$ et $\tilde{P}_P$:

$$\tilde{P}_T = \frac{F^2}{2} Re\,(A_{cf}) = \frac{F^2}{2} Re\,(A_V) \times \frac{P_{Pc}}{P_{T\infty}} = \frac{F^2}{2} Re\,(A_V)\,\Gamma$$

où $\quad \Gamma = \dfrac{P_{Pc}}{P_{T\infty}}$

et

$$\widetilde{P}_P = \widetilde{P}_T \quad \frac{P_{PC}}{P_{T\infty}} = \Gamma \widetilde{P}_T$$

La puissance moyenne $\widetilde{P}$ rayonnée dans le fluide par la plaque finie est donnée par :

$$(25') \quad \widetilde{P}_F = \widetilde{P}_T - \widetilde{P}_P \ (1-\Gamma) \ \widetilde{P}_T$$

Nous utilisons la formule de (25') pour calculer la transparence au son d'une cloison.

Enfin, on peut démontrer facilement qu'aux hautes fréquences P_P décroît en $\frac{1}{\omega^8}$, et nous avons démontré (V,2) qu'aux hautes fréquences $P_{T\infty}$ décroît en $\frac{1}{\omega^7}$ donc aux hautes fréquences :

$$\widetilde{P}_T = 0 \ \left(\frac{1}{\omega}\right)$$

La puissance moyenne totale admise par la système "plaque finie, fluide" décroît en $\frac{1}{\omega}$.

- CHAPITRE VIII -

PREMIERE VERIFICATION EXPERIMENTALE : LOI DE DENSITE DES MODES PROPRES.

La formule proposée par Heckl [1] liant la densité de modes propres d'une plaque finie dans le vide à la partie réelle de son admittance est la suivante :

$$\text{(26)} \qquad \mathrm{Re}\,(A_f) \simeq \mathrm{Re}\,(A\infty) \simeq \frac{\pi}{2Sm}\,\frac{\Delta N}{\Delta \omega}$$

où

S = aire de la plaque

ΔN = le nombre de modes propres dans l'intervalle $\Delta\omega$.

Lors du couplage cette formule doit être vérifiée en dessous de la fréquence crtique car le rayonnement acoustique étant très faible nous avons :

$$\mathrm{Re}\,(A_{cf}) \simeq \mathrm{Re}\,(A_{c\infty}) \simeq \frac{\pi}{2Sm}\,\frac{\Delta N}{\Delta \omega} \qquad \text{pour } \lambda > k$$

Mais au-dessus de cette fréquence le rayonnement acoustique prend de l'importance et il n'y a plus d'équivalence entre les parties réelles de l'admittance d'une plaque finie et d'une plaque infinie

$$\mathrm{Re}\,(A_{cf}) \neq \mathrm{Re}\,(A_{c\infty}) \qquad \text{pour } \lambda < k$$

Nous utilisons dans ce cas :

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{Re}\,(A_{cf}) \simeq \frac{\pi}{2Sm}\,\frac{\Delta N}{\Delta \omega} \qquad \text{pour } \lambda < k.$$

La première vérification expérimentale consiste à comparer la partie réelle de l'admittance calculée numériquement à partir de l'étude théorique aux valeurs mesurées de $\frac{\Delta N}{\Delta F}$.

VIII.1. Montage expérimentale.

Nous nous intéressons au nombre de modes propres dans une bande de fréquence, sans nous soucier de les identifier. Pour cela nous avons utilisé le montage des photos (photos 1 et 2).

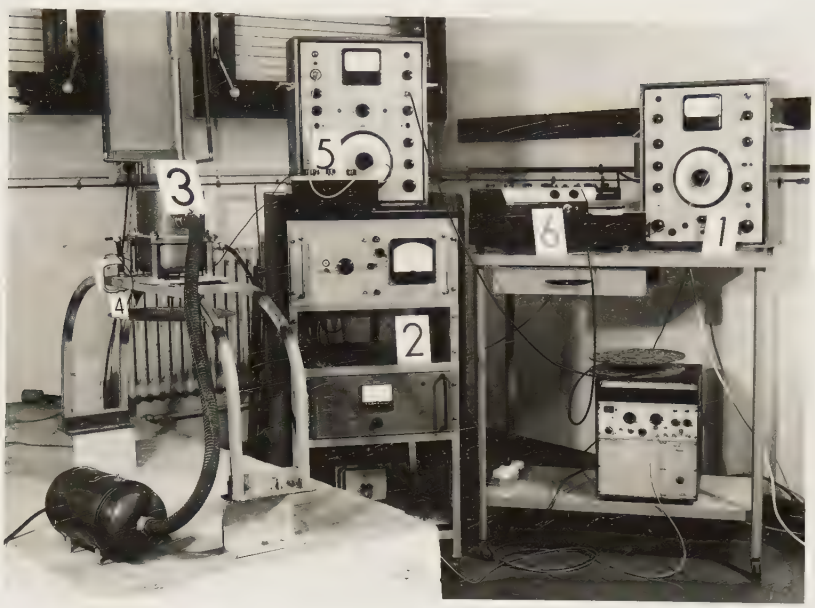


Photo 1. Mesure de la densité de modes propres d'une plaque couplée avec l'air des deux côtés.

1. Générateur synchronisé avec l'enregistreur de niveau 6.
2. Amplificateur de puissance
3. Excitateur
4. Capteur de vibrations, dont le signal est amplifié par l'amplificateur 5.

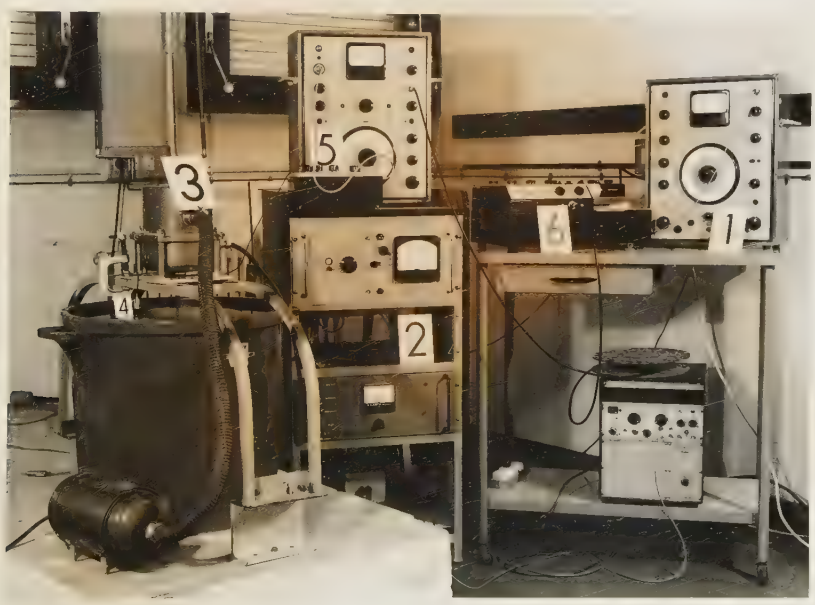


Photo 2. Mesure de la densité de modes propres d'une plaque couplée avec de l'air d'un côté et l'eau de l'autre.

Par sa tige, l'excitateur communique une force ponctuelle harmonique au centre de la plaque libre et on enregistre le mouvement à l'aide du capteur d'accélération placé sur la plaque. La présence d'un mode propre se manifeste par un maximum d'amplitude sur la courbe.

Le même montage a été réalisé pour la plaque couplée avec l'air ou avec l'eau. Dans le cas du couplage avec l'eau la plaque, portée par la tige de l'excitateur, est posée sur l'eau contenue dans une cuve. L'expérience a porté sur des plaques d'acier et de duralumin de forme circulaire.

VIII.2. Résultats expérimentaux.

a) Plaque dans l'air.

Les figures (1, 2, 3) correspondent respectivement à une plaque d'acier de 3 mm, une plaque de duralumin de 3 mm et une plaque d'acier de 1 mm (ces plaques ayant toutes un diamètre de 40 cm). Sur ces figures on a tracé :

1°) la courbe de la partie réelle de l'admittance correspondant au calcul théorique de la plaque infinie couplée (formule (21))

2°) la courbe de la partie réelle de l'admittance correspondant au calcul théorique corrigé pour la plaque finie couplée (formule (25))

3°) la courbe de la partie réelle de l'admittance déterminée à partir de la mesure de la densité de modes propres dans une bande de 1 000 Hz (formule (27))

4°) la courbe de la partie réelle de l'admittance déterminée à partir de la moyenne de la densité de modes propres dans un bande de 1 000 Hz (moyenne prise sur des bandes de 3 000 Hz, soit par exemple ΔN_i le nombre de modes propres dans la bande i, dans la formule (27) on utilise $\Delta N = \frac{\Delta N_{i-1} + \Delta N_i + \Delta N_{i+1}}{3}$.

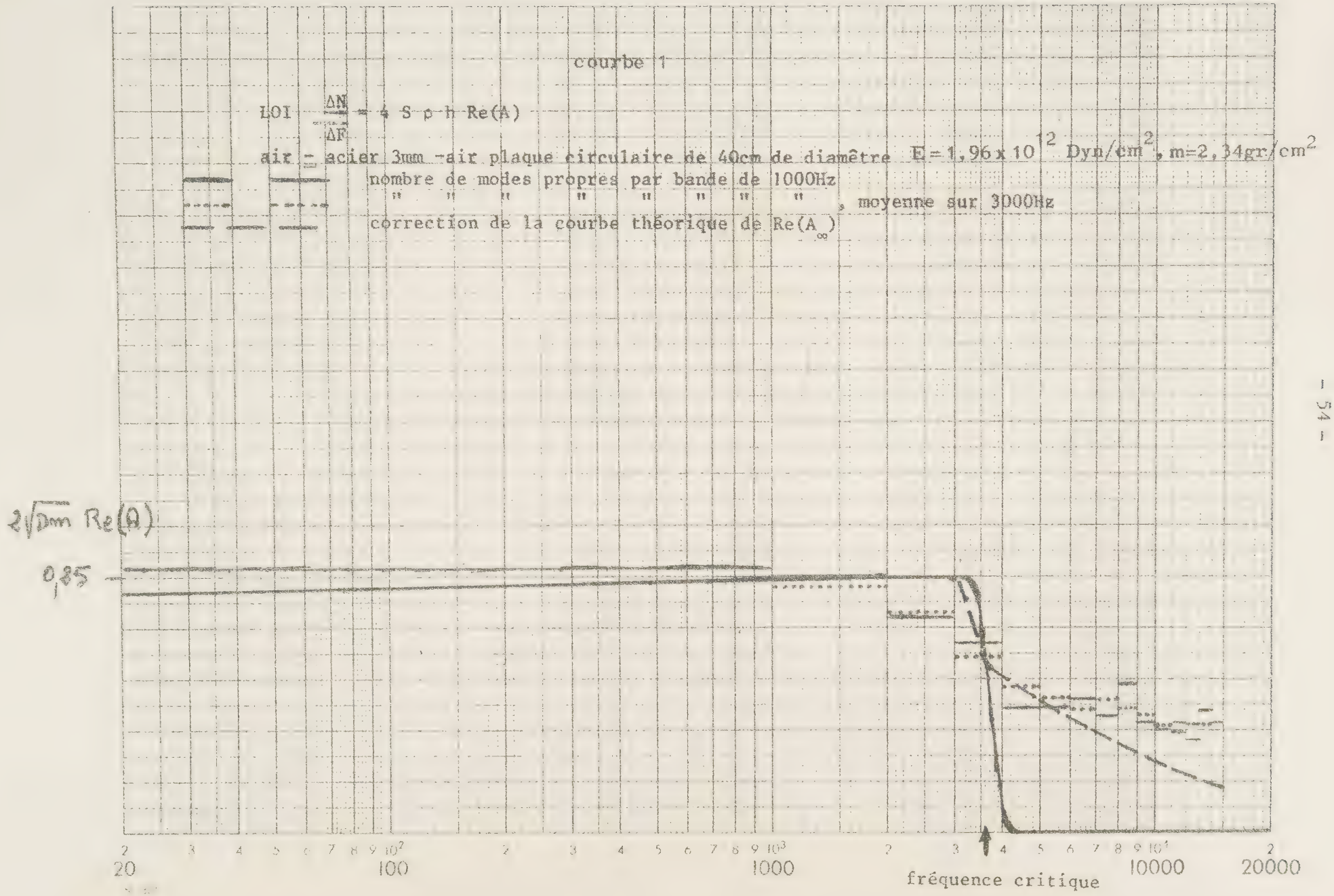
b) Plaque couplée d'un côté avec de l'eau et de l'autre côté avec l'air.

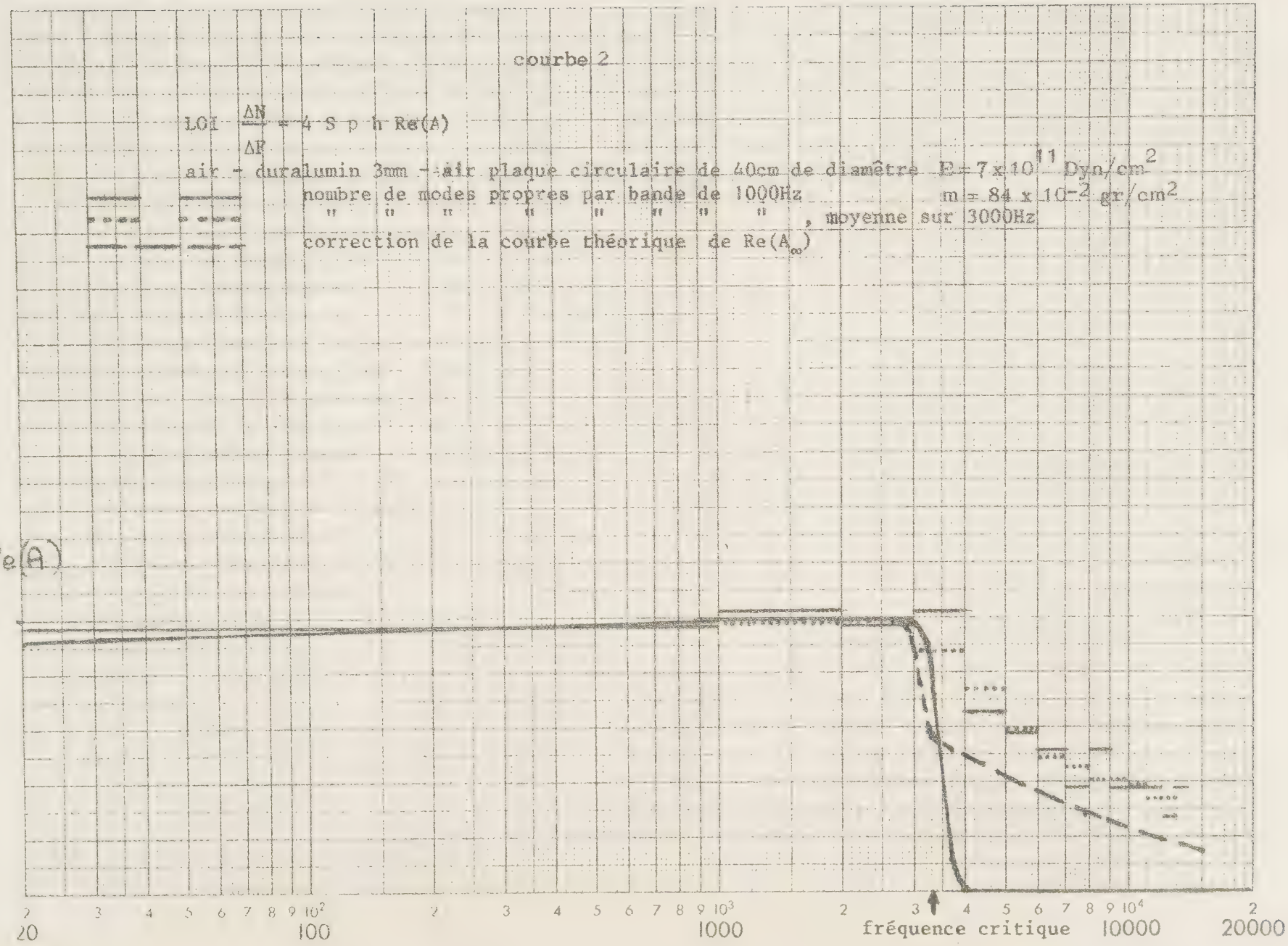
On prend les mêmes plaques que les précédentes, mais cette fois posées sur l'eau contenue dans une cuve. On relève les modes propres de façon anlogue, mais dans ce cas on constate des fréquences de résonances parasites dues à la cuve. Pour les éliminer, on utilise deux plaques du même métal et de même épaisseur, mais de différents diamètres. Les fréquences de résonances parasites dues à la cuve apparaissent sur les 2 enregistrements, ce qui permet de les éliminer.

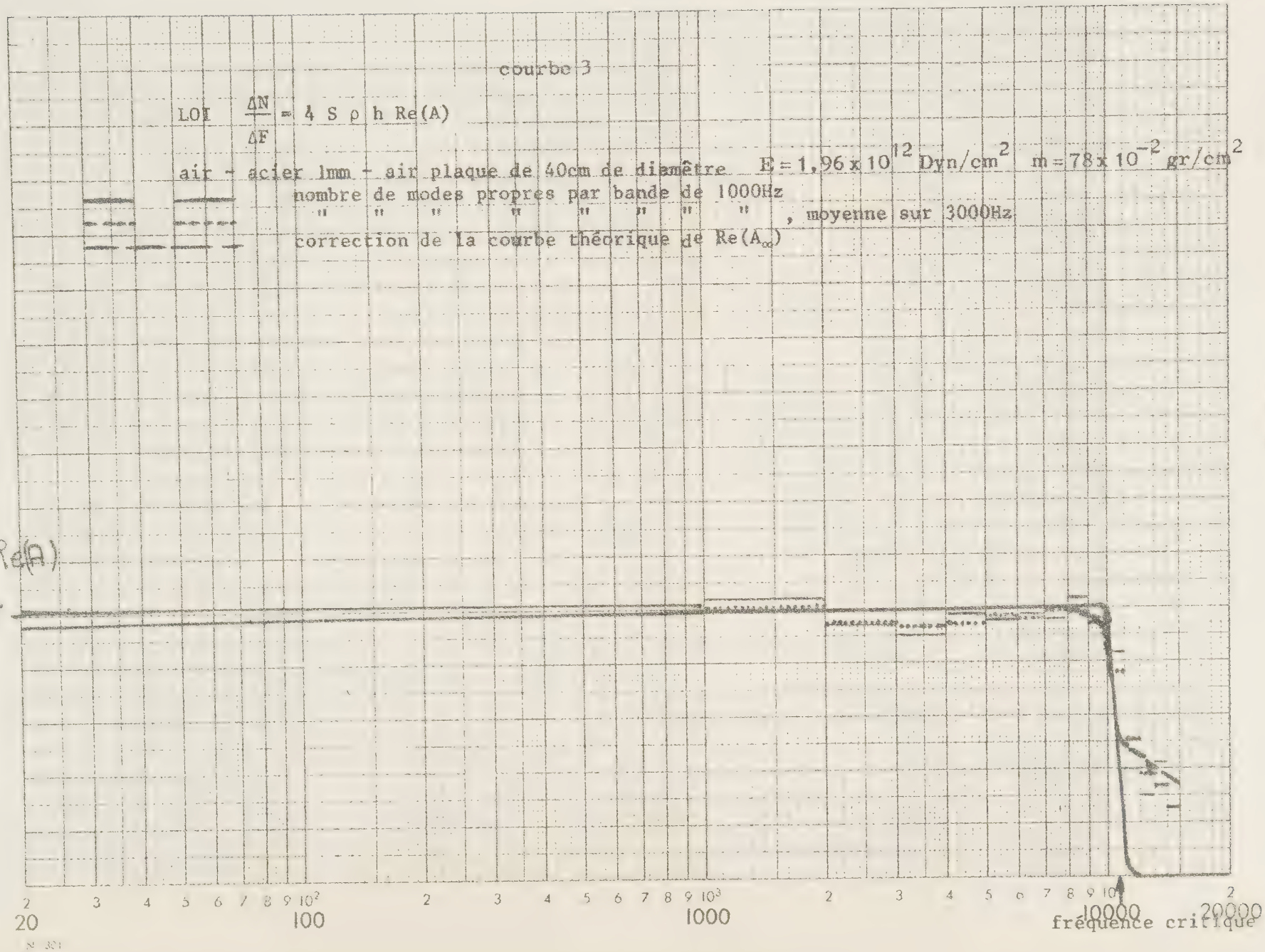
Les figures (4, 5, 6) correspondent aux mêmes plaques, et sont tracées suivant le procédé ci-dessus. Cependant en ce qui concerne la courbe théorique, le calcul théorique du couplage d'une plaque avec deux fluides différents étants difficile, nous avons pris pour la partie réelle de l'admittance du système "air, plaque, eau" la demi somme des parties réellles des admittances calculées pour les systèmes "eau, plaque, eau" et "air, plaque, air", soit:

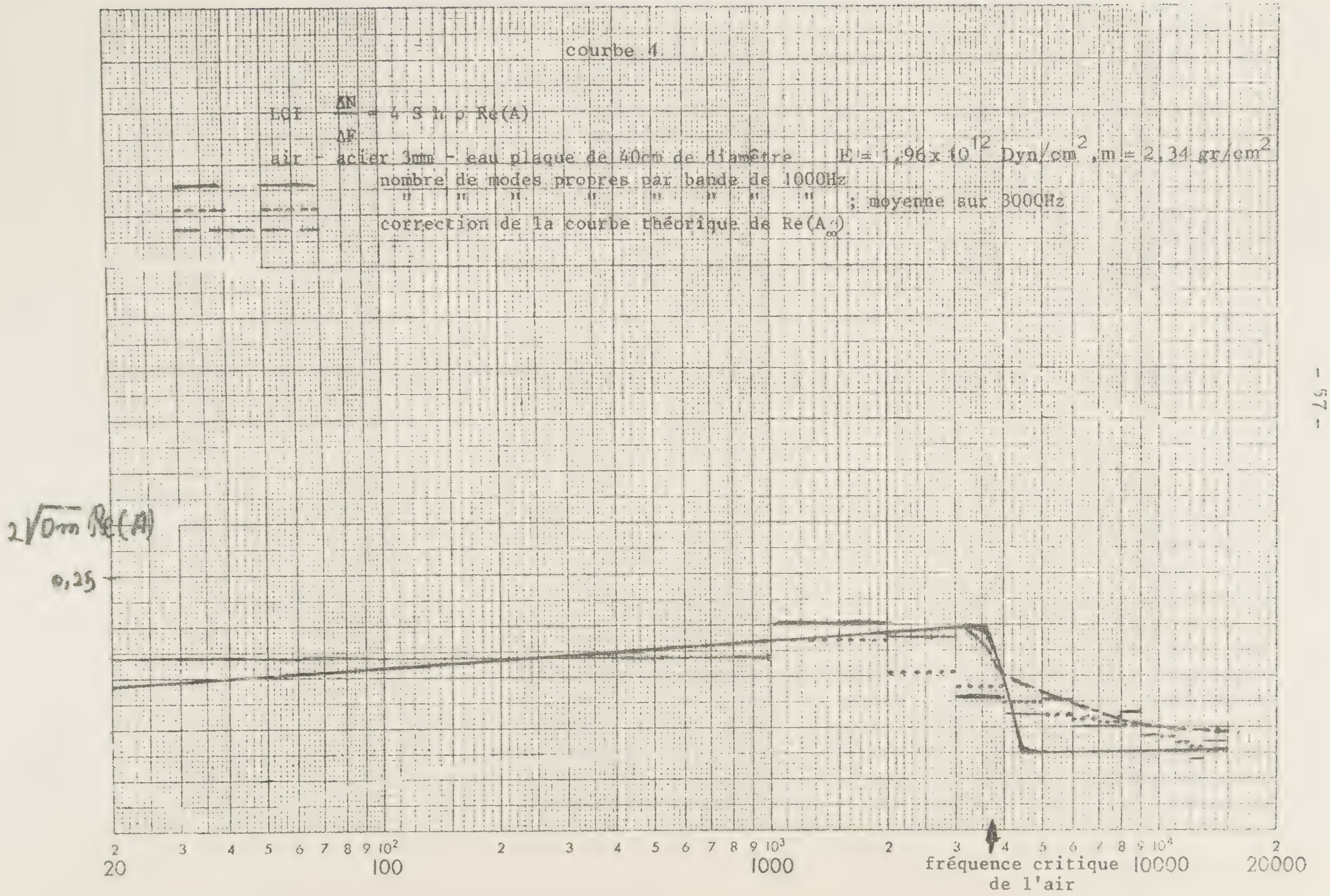
$$(28) \qquad \mathrm{Re}\,(A_{,\,air,eau}) \simeq \frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\,(A_{air,air}) + \mathrm{Re}\,(A_{eau,eau})\right]$$

on peut voir en considérant la transformée de Fourier du déplacement de la plaque que, cette approximation nous amène à négliger un opérateur dont la transformée de Fourier décroît en ξ^{-5} devant l'unité (voir annexe 3).


courbe 1
LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{4}{c} S \rho h \mathrm{Re}(A)$
air = acier 3mm -air plaque circulaire de 40cm de diamètre $E = 1,96 \times 10^{12}$ Dyn/cm^2, m=2,34gr/cm^2
nombre de modes propres par bande de 1000Hz
" " " " " " " " , moyenne sur 3000Hz
correction de la courbe théorique de $\mathrm{Re}(A_\infty)$
$2\sqrt{Dm}\,\mathrm{Re}(A)$
0,85
2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2
20 100 1000 10000 20000
fréquence critique


courbe 2
LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = 4 S \rho h Re(A)$
air - duralumin 3mm - air plaque circulaire de 40cm de diamètre $E = 7 \times 10^{11}$ Dyn/cm^2
nombre de modes propres par bande de 1000Hz $m = 84 \times 10^{-2}$ gr/cm^2
" " " " " " " " , moyenne sur 3000Hz
correction de la courbe théorique de $Re(A_\infty)$
$2\sqrt{Dm}\,Re(A)$
0,25
2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2
20 100 1000 fréquence critique 10000 20000


courbe 3
LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = 4 S \rho h Re(A)$
air - acier 1mm - air plaque de 40cm de diamètre $E = 1,96 \times 10^{12}$ Dyn/cm^2 $m = 78 \times 10^{-2}$ gr/cm^2
nombre de modes propres par bande de 1000Hz
" " " " " " " " , moyenne sur 3000Hz
correction de la courbe théorique de $Re(A_\infty)$
$\frac{1}{2}\sqrt{D_m}\, Re(A)$
0,25
2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2
20 100 1000 10000 20000
fréquence critique


courbe 4
LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = 4 S h \rho Re(A)$
air - acier 3mm - eau plaque de 40cm de diamètre E = 1,96 x 10^12 Dyn/cm^2 , m = 2,34 gr/cm^2
nombre de modes propres par bande de 1000Hz
" " " " " " " " ; moyenne sur 3000Hz
correction de la courbe théorique de Re(A∞)
$2\sqrt{\Omega m}\, Re(A)$
0,25
2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2
20 100 1000 fréquence critique 10000 20000
de l'air

courbe 5

LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = 4\ S\ \rho\ h\ Re(A)$ air - duralumin 3mm - eau plaque de 40cm de diamètre

nombre de modes propres par bande de 1000Hz

" " " " " " " " , moyenne sur 3000Hz

correction de la courbe théorique $Re(A_\alpha)$

$E = 1{,}96 \times 10^{12}$ Dyn/cm^2

$m = 84 \times 10^{-2}$ gr/cm^2

$2\sqrt{Dm}\ Re(A)$

0,25

2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2

20 100 1000 10000 20000

fréquence critique de l'air

courbe 6

LOI $\frac{\Delta N}{\Delta F} = 4\, S\, \rho\, h\, Re(A)$

air - acier 1mm - eau plaque de 40cm de diamètre $E = 1,96 \times 10^{12}$ Dyn/cm^2, $m = 78 \times 10^{-2}$ gr/cm^2

nombre de modes propres par bande de 1000Hz

" " " " " " " " " , moyenne sur 3000Hz

correction de la courbe théorique de $Re(A_\infty)$

$2\sqrt{D_m}\, Re(A)$

0,25

2 3 4 5 6 7 8 9 10^2 2 3 4 5 6 7 8 9 10^3 2 3 4 5 6 7 8 9 10^4 2

20 100 1000 10000 20000

fréquence critique de l'air

- CHAPITRE IX -

DEUXIEME VERIFICATION EXPERIMENTALE : DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES.-

Détermination des fréquences de résonance d'une plaque couplée avec l'air et l'eau à partir des fréquences de résonance de la même plaque dans le vide, au-dessous de la fréquence critique.

Au-dessous de la fréquence critique, on peut assimiler la présence du fluide équivalent à une augmentation de masse de la plaque par rapport à celle de la plaque dans le vide. Cette approximation permet de déterminer les fréquences de résonance d'une plaque couplée avec un fluide (eau par exemple).

Le rapport d'augmentation de masse se détermine à partir de celui des parties réelles des admittances. En effet, soit f la fréquence de résonance d'une plaque dans le vide, on a :

$$2\pi f = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{m}} \longrightarrow \frac{2\pi f}{D\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{Dm}}$$

En tenant compte de l'hypothèse d'augmentation de masse, on peut écrire que pour le même mode de résonance, la fréquence lors du couplage est donnée par :

$$2\pi f_c = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{m_c}} \longrightarrow \frac{2\pi f_c}{D\lambda^2} = \sqrt{\frac{1}{Dm_c}}$$

donc

$$\frac{f}{f_c} = \sqrt{\frac{Dm_c}{Dm}}$$

D'autre part, la partie réelle de l'admittance pour une plaque dans le vide est :

$$Re\,(A_V) = \frac{1}{8\sqrt{Dm}}$$

alors de la même façon, on peut écrire que :

$$Re\,(A_{cf}) = \frac{1}{8\sqrt{Dm_c}}$$

ce qui donne :

$$\frac{Re\,(A_V)}{Re\,(A_{cf})} = \sqrt{\frac{Dm}{Dm_c}}$$

d'où

$$(29) \qquad \frac{f}{f_C} = \frac{Re\,(A_V)}{Re\,(A_c)} \xrightarrow{(30)} Re\,(A_{cf}) = Re\,(A_V)\,\frac{f_C}{f}$$

Dans ce chapitre nous comparons les parties réelles de l'admittance de différentes plaques circulaires déterminées à partir du calcul théorique en tenant compte de (28) à celle obtenue par mesure des fréquences propres [(f_C et f) formule (30)].

IX.1. Montage expérimental.

Cette expérience consiste à déterminer les modes propres de la plaque dans l'air d'une part, et couplée avec de l'eau d'autre part. On détermine les modes propres à partir des figures dessinées sur la plaque par du sable. Le montage adopté comprend alors : un générateur, un amplificateur, un fréquencemètre et un excitateur (voir les photos 3 et 4).

IX.2. Résultats expérimentaux.

Les figures (7, 8, 9, 10) correspondent respectivement à une plaque d'acier de 3 mm et une plaque d'acier de 1 mm ayant un diamètre de 30 cm, toutes deux circulaires; une plaque circulaire d'acier de 2 mm, et une plaque rectangulaire d'acier de 2 mm également.

Sur ces figures on a tracé :

1°) la partie réelle de l'admittance correspondant au calcul théorique pour la plaque infinie (en tenant compte de(28)).

2°) La partie réelle de l'admittance correspondant au calcul corrigé pour la plaque finie.

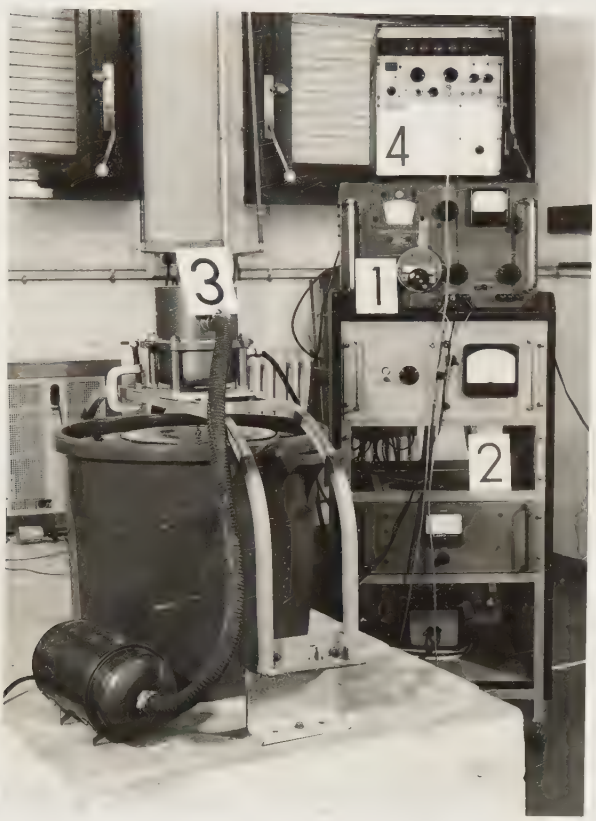
3°) La partie réelle de l'admittance correspondant à la mesure des fréquences propres (formule (30)).

Dans la pratique, il est intéressant de connaître les fréquences de résonance d'une plaque couplée avec un fluide. Possédant les deux courbes de la partie réelle de l'admittance tracées sur un papier millimétré pour la plque dans le vide et celle de la plaque couplée avec le fluide, et connaissant les fréquences de résonance de la plaque dans le vide, portons les fréquences de résonance de la plaque dans le vide en abscisse. Par homothétie on trouve les fréquences de résonance de la plaque couplée (au-dessous de la fréquence critique).

- Photo 3 -

Mesure de modes propres d'une plaque couplée avec l'air des deux côtés

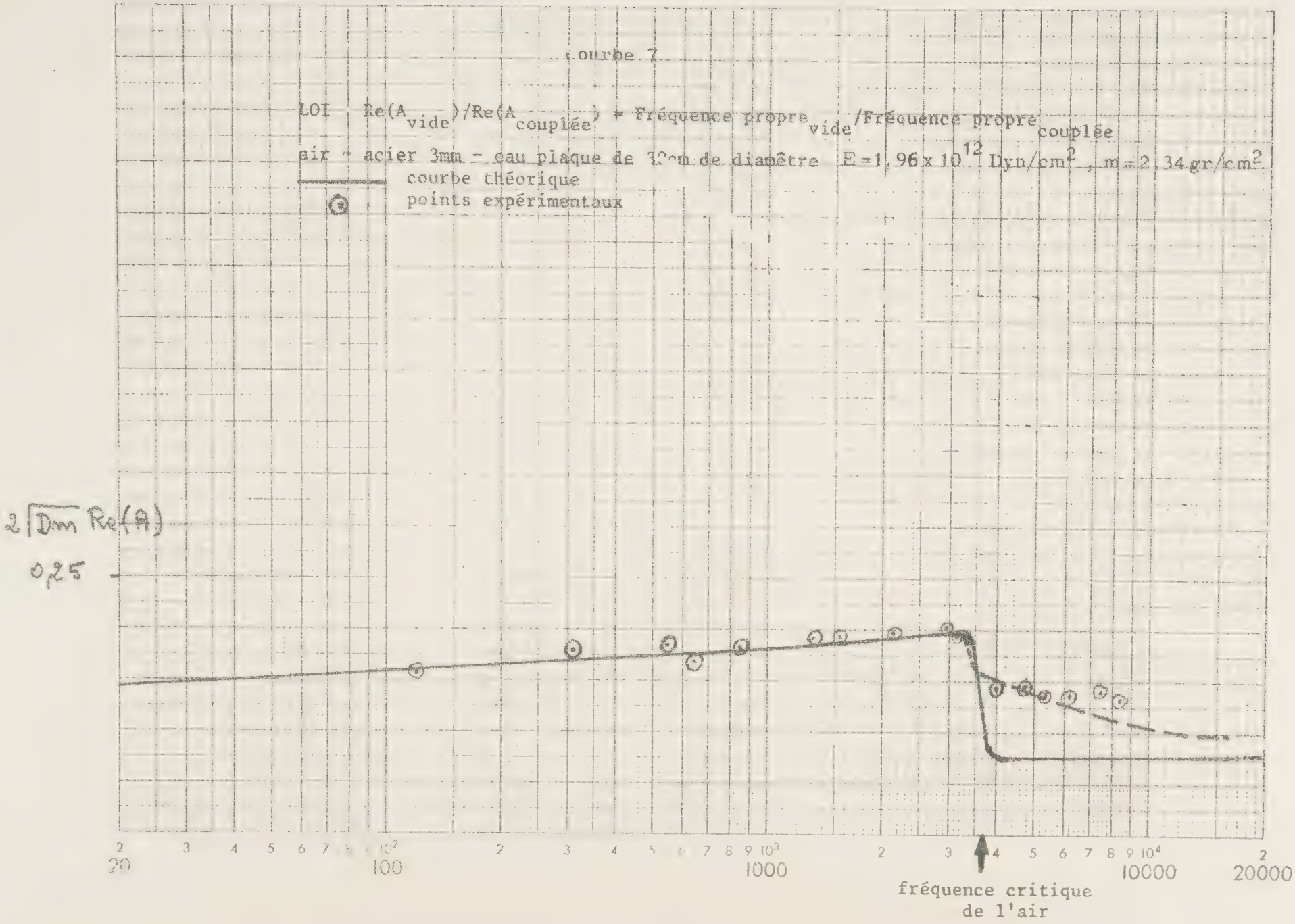
1. Générateur
2. Amplificateur de puissance
3. Excitateur
4. Fréquencemètre.



- Photo 4 -

Mesure des modes propres d'une plaque couplée d'un côté avec l'air, de l'autre avec l'eau.

1. Générateur
2. Amplificateur de puissance
3. Excitateur
4. Fréquencemètre.


courbe 7
Re(A vide)/Re(A couplée) = fréquence propre vide/Fréquence propre couplée
air - acier 3mm - eau plaque de 30cm de diamètre E=1,96 x 10^12 Dyn/cm^2 , m=2,34 gr/cm^2
courbe théorique
points expérimentaux
2√Dm Re(A)
0,25
2 3 4 5 6 7 8 9 10^2
20
100
2 3 4 5 6 7 8 9 10^3
1000
2 3 4 5 6 7 8 9 10^4
10000
2
20000
fréquence critique
de l'air

courbe 8

LOI : $Re(A_{vide})/Re(A_{couplé}) = Fréquence\ propre_{vide}/Fréquence\ propre_{couplée}$

air - acier 1mm - eau plaque de 30cm de diamètre $E=1,96 \times 10^{12}$ Dyn/cm^2, $m=78 \times 10^{-2}$ gr/cm^2

courbe théorique

points expérimentaux

$2\sqrt{Dm}\,Re(A)$

0,25

20 100 1000 10000 20000

fréquence critique de l'air

courbe 9

Loi $Re(A_{vide})/Re(A_{couplé}) = Fréquence\ propre_{vide}/fréquence\ propre_{couplée}$

air-acier-eau plaque rectangulaire 15 x 25 x 0,2 cm^3

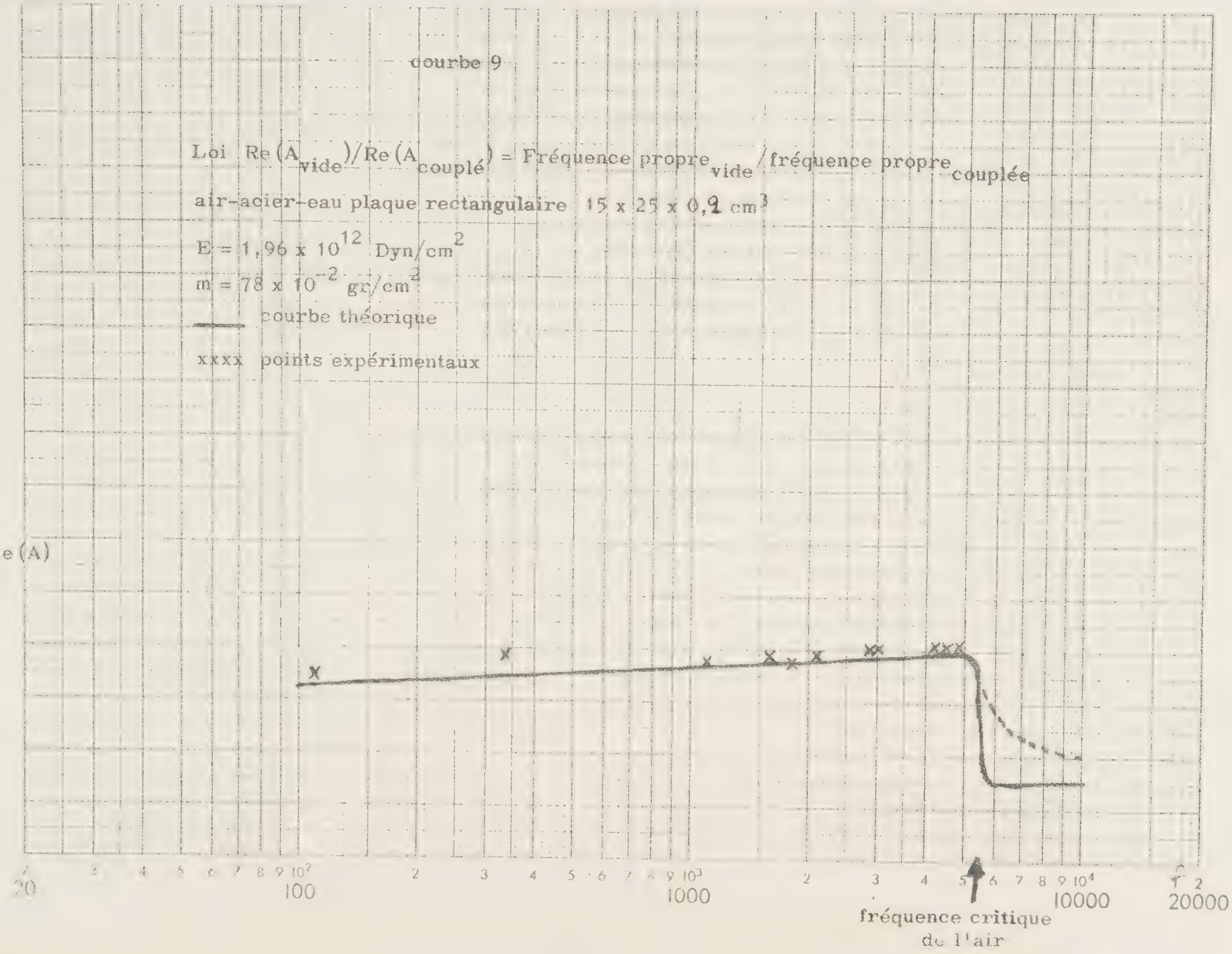
$E = 1,96 \times 10^{12}\ Dyn/cm^2$

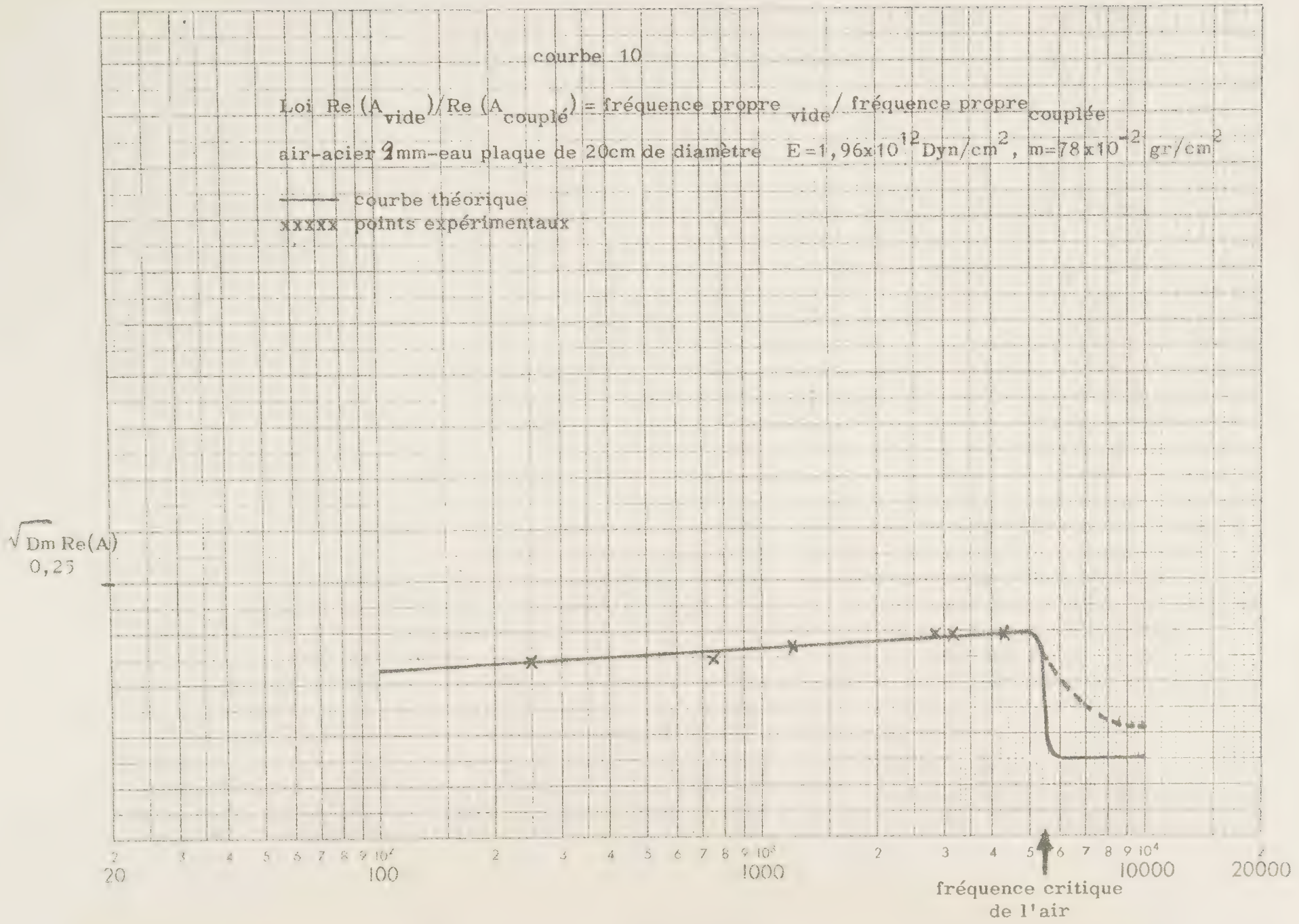
$m = 78 \times 10^{-2}\ gr/cm^2$

——— courbe théorique

xxxx points expérimentaux

$2\sqrt{Dm}\ Re(A)$
0,25




courbe 10
Loi Re (A vide)/Re (A couplé) = fréquence propre vide / fréquence propre couplée
air-acier 2mm-eau plaque de 20cm de diamètre E=1,96x10^12 Dyn/cm^2, m=78x10^-2 gr/cm^2
courbe théorique
xxxxx points expérimentaux
√Dm Re(A)
0,25
20
100
1000
10000
20000
fréquence critique
de l'air

- CHAPITRE X -

TROISIEME VERIFICATION EXPERIMENTALE : INDICE D'AFFAIBLISSEMENT D'UNE CLOISON.

On définit l'indice d'affaiblissement acoustique d'une cloison par :

$$T\,(dB) = 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_1}$$

où on désigne par

P_o : la puissance incidente excitant la paroi

P_1 : la puissance transmise par la paroi.

Nous avons résolu le problème du couplage dans le cas d'une excitation ponctuelle de la plaque. Pour ramener au cas précédent le problème de la transparence, considérons cette fois-ci une pression acoustique p constante appliquée sur toute la surface S de la plaque; la force correspondant à cette pression est $F = p\,S$, et la puissance moyenne totale admise par le système sera donc :

$$\tilde{P}_T = \frac{F^2}{2} \mathrm{Re}\,(A_{cf}) = \frac{p^2 S^2}{2} \mathrm{Re}\,(A_{cf})$$

en tenant compte (25') la puissance transmise s'écrit :

$$P_1 = \frac{\tilde{P}_F}{2} = \frac{1}{2}(1-\Gamma)\,\tilde{P}_T = \frac{1}{2}(1-\Gamma)\,\frac{p^2 S^2}{2} \mathrm{Re}\,(A_{cf})$$

Or la puissance incidente excitant la plaque est reliée à la pression p par :

$$P_o = \frac{p^2 S}{2 \rho C}$$

ρ : densité volumique d'air

C : célérité du son dans l'air.

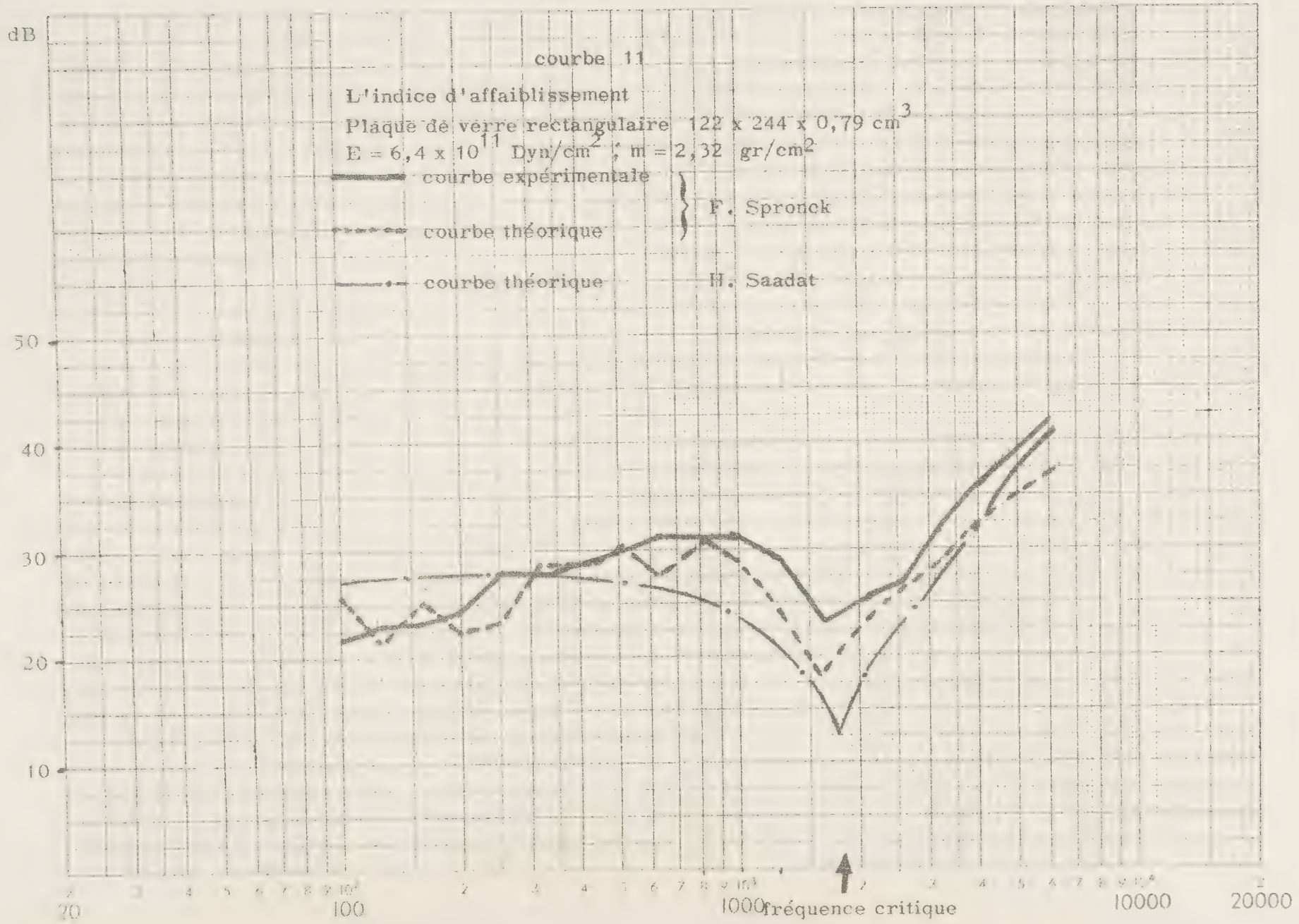
On en déduit donc :

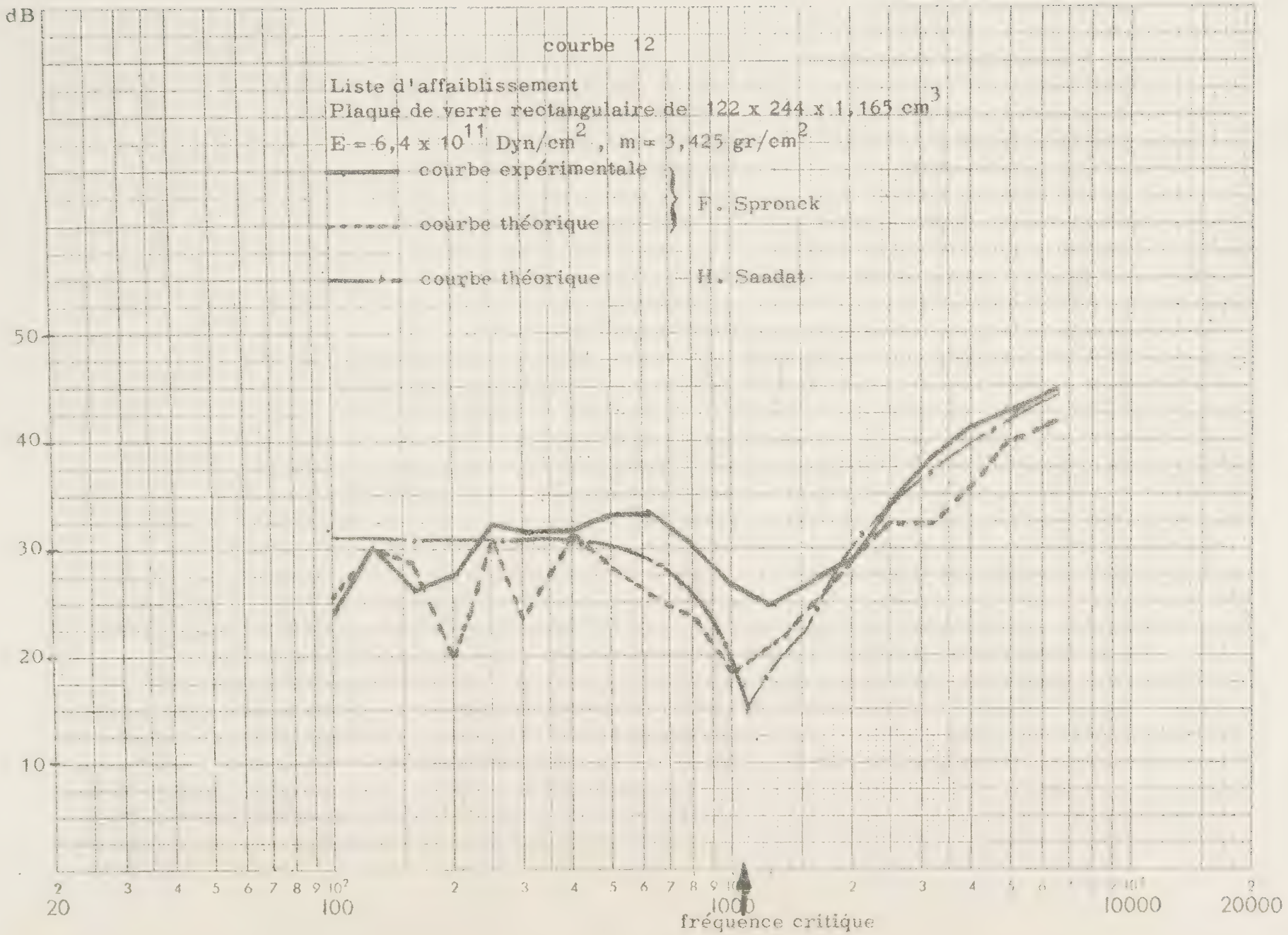
$$(30) \qquad T = 10 \log_{10} \left(\frac{2}{\rho C S} \cdot \frac{1}{(1-\Gamma)\,\mathrm{Re}\,(A_{cf})} \right)$$

Nous avons effectué le calcul pour des plaques de verre d'épaisseur différentes et nous comparons nos résultats avec les résultats expérimentaux et théoriques de F. Spronck [22].

Les calculs sont faits sur UNIVAC 1106 ; le temps de calcul ne dépasse pas 30 secondes.

Il faut noter : 1°) dans ce calcul nous ne faisons pas intervenir la contribution de chaque mode; nous nous contentons d'une évaluation énergétique globale du phénomène. 2°) En outre la courbe que nous donnons représente le spectre de l'énergie transmise, ce qui explique le minimum très prononcé à la fréquence critique, minimum qui est lissé par l'analyse en 1/3 d'octave des résultas expérimentaux et théoriques de l'auteur cité. Les résultats consignés dans les figures 11 et 12 montrent un bon accord entre nos prévisions théoriques et l'expérience citée dans [22]. Il est à noter que la méthode approximative que nous préconisons nécessite une programmation très facile et des temps de calcul très courts en raison de la simplicité des formules que nous avons obtenues.


dB
courbe 11
L'indice d'affaiblissement
Plaque de verre rectangulaire 122 x 244 x 0,79 cm3
E = 6,4 x 10^11 Dyn/cm2 ; m = 2,32 gr/cm2
courbe expérimentale
courbe théorique
F. Spronck
courbe théorique
H. Saadat
50
40
30
20
10
20
100
1000
fréquence critique
10000
20000


dB
courbe 12
Liste d'affaiblissement
Plaque de verre rectangulaire de 122 x 244 x 1,165 cm3
E = 6,4 x 10^11 Dyn/cm2 , m = 3,425 gr/cm2
courbe expérimentale
courbe théorique
F. Spronck
courbe théorique
H. Saadat
50
40
30
20
10
20
100
1000
10000
20000
fréquence critique

- CHAPITRE XI -

CONCLUSION GENERALE.

L'étude du problème simple de la première partie est cependant très utile :

a) Lorsqu'il y a des racines double à partir de (10) on peut obtenir la solution du problème par une simple dérivation de (10) par rapport à la racine double. En particulier, quand le fluide s'évanouit toutes les formules que nous avons données permettent de retrouver les expressions correspondantes de la plaque infinie dans le vide.

b) Elle montre deux comportements différents du système : au-dessous de la fréquence critique ($K<\lambda$) le système admet une énergie importante (dans l'air P_T = puissance admise par la plaque dans le vide), qui reste en quasi-totalité dans la plaque. Au-dessus de la fréquence critique ($K>\lambda$) la puissance totale admise qui décroît en ω^{-7} est en quasi- totalité rayonnée dans le fluide. (résultats partiellement connus).

c) De l'expression P_T , nous avons déduit la partie réelle de l'admittance de la plaque infinie couplée, et, par des considérations énergétiques nous avons obtenu une approximation de la partie réelle de l'admittance d'une plaque de dimensions finies couplée avec un fluide.

d) L'expression approchée de la partie réelle de l'admittance d'une plaque finie couplée, nous donne une estimation satisfaisante de la densité de modes propres d'une plaque finie couplée.

e) La variation de la partie réelle de l'admittance nous a amené à suggérer l'interprétation suivante: pour $K<\lambda$ la présence du fluide est équivalente à une augmentation de masse de la plaque, ainsi, il nous a été aisé de déterminer les fréquences de résonance d'une plaque finie couplée à partir des valeurs obtenues pour la plaque dans le vide (au-dessous de la fréquence critique).

f) Au-delà de la fréquence critique, il semble que la présence du fluide peut-être assimilée à une augmentation de rigidité de la plaque qui s'ajoute à l'augmentation de masse. Mais la vérification expérimentale est délicate: en effet le système admettait très peu d'énergie, pour déterminer à quel mode propre correspond une résonance.

On est souvent amené à alimenter l'excitateur avec une puissance trop élevée, et il n'est pas certain que le taux distorsion soit négligeable. Cependant, nous avons pu déterminer avec certitude quelques modes propres au-dessus de la fréquence critique pour lesquelles l'hypothèse proposée est vérifiée (voir courbe 7).

g) Enfin les résultats théoriques auxquels nous aboutissons permettent de déterminer des courbes de transparence de cloison ne nécessitant que 20 à 30 secondes de calcul sur UNIVAC 1106 et que l'expérience vérifie de façon satisfaisante. Les méthodes proposées par d'autres auteurs (Spronck, Brodut) sont plus précises uniquement dans le domaines des basses fréquences puisqu'elles font intervenir les modes propres de la plaque; mais elles nécessitent un temps de calcul très important (il faut déterminer plusieurs centaines de modes) et sont inapplicables lorsque la cloison n'a pas une forme simple permettant la détermination des fréquences propres par séparation de variables.

Annexes

- ANNEXE 1 -

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS DE SCHWARZ.

. Comportement asymptotique de Je.

$$\frac{1}{k} Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) = \int_0^r e^{ikt} J_0(\alpha t) \simeq \int_0^r e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{A e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\right) dt + A \int_0^r \frac{e^{i(k-\alpha)t}}{\sqrt{t}} dt$$

avec

$$A = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\alpha}}$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^r e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{A e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\right) dt$$

reste convergente pour $r \to \infty$, et on peut écrire :

$$\frac{1}{k} Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) = \int_0^\infty e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{A e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}} dt\right) - \int_r^\infty e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{A e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\right) dt +$$

$$+ \int_0^r \frac{A e^{i(k-\alpha)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Pour $r \to \infty$ on remplace J_0 par son comportement asymptotique.

$$J_0(\alpha t) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} \quad \frac{e^{i\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\alpha t - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{t}}$$

d'où

$$\frac{1}{k} Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) \simeq \int_0^\infty e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{A e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\right) dt + \left\{ \frac{\left[C_2(\alpha+k)r + i S_2(\alpha+k) r\right]}{\sqrt{\alpha+k}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+i) \right\} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\alpha}} + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \sqrt{2\pi} \left[\frac{C_2(k-\alpha)r + i S_2(k-\alpha) r}{\sqrt{k-\alpha}} \right] \right.$$

où $C_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ et $S_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$

sont des intégrales de Fresnel. Ces deux fonctions s'expriment à l'aide de deux fonctions auxiliaires f et g sous la forme :

$$C_2(z) = \frac{1}{2} + f\left(\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\right) \sin(z) - g\left(\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\right) \cos(z)$$

$$S_2(z) = \frac{1}{2} - f\left(\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\right) \cos(z) - g\left(\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\right) \sin(z)$$

ces deux fonctions g et f possédent pour $z \to \infty$ le comportement suivant :

$$f(z) \simeq \frac{1}{\pi z} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1.3.\ldots.(4m-1)}{\pi z.(\pi z^2)^{2m}} \qquad (z \to \infty, |\arg z| < \tfrac{\pi}{2})$$

et $$g(z) \simeq \sum_{m=o}^{\infty} (-1)^m \frac{1.3.\ldots.(4m+1)}{\pi z (\pi z^2)^{2m+1}} \qquad (z \to \infty, |\arg z| < \tfrac{\pi}{2})$$

qui donnent les comportements asymptotiques de C_2 et S_2.

Utilisant les comportements asymptotiques de C_2 et S_2 et ne conservant que les termes à décroissance les plus lentes, nous obtenons :

$$\frac{1}{k} Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr \to \infty\right) \simeq \int_0^{\infty} e^{ikt} \left(J_0(\alpha t) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\right) dt -$$

$$-i \frac{e^{i\left[(k+\alpha)r - \frac{\pi}{4}\right]}}{\sqrt{2\pi\alpha}(k+\alpha)\sqrt{r}} - i \frac{e^{i\left[(k-\alpha)r + \frac{\pi}{4}\right]}}{\sqrt{2\pi\alpha}(k-\alpha)\sqrt{r}} + \frac{1+i}{2\sqrt{\alpha}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k-\alpha}}.$$

2. Comportement asymptotique de He.

Pour obtenir ce comportement suivons la même méthode que précédemment. Dans ce cas le calcul est plus simple; en effet :

$$\frac{1}{k} He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right)\Big|_{r \to \infty}^{\infty} = \int_{r \to \infty}^{\infty} e^{ikt} H_0(\alpha t)\, dt$$

Il suffit de remplacer H_0 par son comportement asymptotique, soit :

$$H_0(\alpha t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{e^{i(\alpha t - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{t}}$$

donc :

$$\frac{1}{k}\,He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right)\Big|_{r\to\infty}^{\infty} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \int_{r\to\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k+\alpha)t}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{t}}\, dt \simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\, \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\alpha+k}}$$

$$\left\{C_2\,(k+\alpha)r + i\,S_2\,(k+\alpha) - \frac{1}{2}\,(1+i)\right\} \sqrt{2\pi}$$

et après avoir remplacé C_2 et S_2 par leurs comportements asymptotiques, nous aboutissons à :

$$\frac{1}{k}\,He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right)\Big|_{r\to\infty}^{\infty} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\, \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{(\alpha+k)}\, e^{i(\alpha+k)r}\, \sqrt{r}$$

- ANNEXE 2 -

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\Phi(M)$ (potentiel de vitesse du champ acoustique).

A partir de l'expression donnée pour $\Phi(M)$ par (15), nous calculons son comportement asymptotique pour $\rho \to \infty$. Dans (15) figurent six intégrales multipliées par $h_n(k\rho)$ ou $j_n(k\rho)$ soit :

(1) $\int_0^{\rho} H_0(\alpha r)\, j_n(kr)\, r\,dr$

(2) $\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\, H_0(\alpha r)\, r\,dr$

(3) $\int_0^{\rho} H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) j_n(kr)\, r\,dr$

(4) $\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr$

(5) $\int_0^{\rho} j_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr$

(6) $\int_{\rho}^{\infty} j_n(kr)\, H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) r\,dr$

où nous désignons par α les racines carrées des α_j^2 que nous avons choisies.

Tout d'abord nous calculons le comportement asymptotique de chaque intégrale pour $\rho \to \infty$, ensuite nous remplaçons $h_n(k\rho)$ et $j_n(k\rho)$ par leur comportement asymptotique pour aboutir à (16).

Remplaçons les différentes intégrales

(1) $\int_0^{\rho} H_0(\alpha r)\, j_n(kr)\, r\,dr$

par

$$\int_0^{\infty} j_n(kr)\, H_0(\alpha r)\, r\,dr - \int_{\rho}^{\infty} j_n(kr)\, H_0(\alpha r)\, r\,dr$$

Le premier terme ne dépend pas de ρ. Pour $\rho \to \infty$ remplaçons dans le deuxième terme H_0 et j_n par leur comportement asymptotique, alors:

$$\int_\rho^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k}\int_\rho^\infty \frac{\cos\left(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right)}{r}\,\frac{e^{i\left(\alpha r-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\alpha r}}\,r\,dr$$

que l'on peut écrire :

$$\int_\rho^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{1}{k}\int_\rho^\infty \left[\frac{e^{i(k+\alpha)r}\,e^{-i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r}\,\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{i(\alpha-k)r}}{\sqrt{r}}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\alpha}}\right.$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{1}{k}\left\{\frac{e^{-i\frac{n\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha+k}}\left[\frac{1}{2}(1+i)-C_2(\alpha=k)\rho-iS_2(\alpha+k)\rho\right]+\frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha+k}}\right.$$

$$\left.\left.\left[\frac{1}{2}(1+i)-C_2(\alpha-k)\rho-iS_2(\alpha-k)\rho\right]\right\}\right.$$

Conformément à l'annexe 1 où nous avons défini C_2 et S_2, dont nous avons donné le comportement asymptotique nous aboutissons :

$$\int_0^\rho j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr \simeq \int_0^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr +$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}}\;\underset{\times}{\frac{e^{-i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}}{k(\alpha+k)}}\;\frac{e^{i(\alpha+k)\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\;\underset{\times}{\frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{k(\alpha-k)}}\;\frac{e^{i(\alpha-k)\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

les termes qui sont désignés par une croix sont négligeables pour le calcul de comportement asymptotique du champ, car ils sont multipliés par $h_n(k\rho)$ ou $j_n(k\rho)$ qui se comportent pour $\rho \to \infty$ comme $\frac{e^{ik\rho}}{r\rho}$.

Donc seuls $\int_0^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr$ ne dépendant pas de ρ est conservé.

(2) $\int_\rho^\infty h_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr$

pour $\rho \to \infty$ remplaçons h_n et H_0 par leurs comportements symptotiques, soit :

$$\int_\rho^\infty h_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\,\frac{1}{k}\int_\rho^\infty \frac{e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right)}}{r}\,\frac{e^{i\left(\alpha r-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r}}\,r\,dr$$

Suivant la méthode précédente nous aboutissons à :

$$\int_\rho^\infty h_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,r\,dr \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\;\underset{\times}{\frac{e^{-i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}}{k(\alpha+k)}}\;\frac{e^{i(\alpha+k)\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

(3) $\int_0^\rho H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) j_n(kr)\, r dr$

Pour calculer cette intégrale remplaçons $\int_0^\rho$ par $\int_0^\infty - \int_\rho^\infty$ après l'avoir tout d'abord écrite sous la forme :

$$\int_0^\rho H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{1}{k}, kr\right) j_n(kr)\, r dr = \int_0^\rho \left(j_n(kr)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) H_0(\alpha r) - A\,\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right) r dr +$$

$$+ \int_0^\rho \frac{A\, e^{-\frac{1}{r}}}{r}\, dr$$

où $A = \dfrac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi k\alpha(k-\alpha)}$

Alors nous pouvons écrire :

$$\int_0^\rho H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) j_n(kr)\, r dr = \int_0^\infty \left[H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) j_n(kr) - \frac{A\, e^{-\frac{1}{2}}}{r^2} \right] r dr$$

$$- \int_\rho^\infty \left[j_n(kr)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) H_0(\alpha r) - \frac{A\, e^{-\frac{1}{r}}}{r^2} \right] dr + \int_0^\rho \frac{A\, e^{-\frac{1}{r}}}{r}\, dr$$

la première intégrale ne dépend pas de ρ. Calculons les deux autres termes pour $\rho \to \infty$ remplacant dans la deuxième intégrale les valeurs asymptotiques de $Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right)$ (annexe 1), $H_0(\alpha r)$ et $j_n(kr)$, évaluons les intégrales ainsi obtenues de façon analogue à la précédente à l'aide de C_2 et S_2 ; nous obtenons des termes en

$$\frac{e^{2i(k+\alpha)\rho}}{\rho}\ ,\ \frac{e^{2i\alpha\rho}}{\rho}\ ,\ \frac{e^{2ik\rho}}{\rho}\ ,\ \frac{e^{i(\alpha+k)\rho}}{\rho} \text{ et } \frac{e^{i(\alpha-k)\rho}}{\rho}$$

que nous négligeons (décroissance rapide $\frac{1}{\rho}$) et finalement on a :

$$\int_0^\rho H_0(\alpha r)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) j_n(kr) r dr \simeq \int_0^\infty \left[j_n(kr)\, Je\left(\frac{\alpha}{k}, kr\right) H_0(\alpha r) - \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{r}}}{2\pi\alpha k(k-\alpha) r^2} \right] r dr$$

$$+ \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(k-\alpha)} \left[-\gamma + \log\rho \right] + 0\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

où γ est la constante d'Euler qui apparaît car après avoir remplacé les fonctions de Bessel (cylindrique et sphérique) et Scwarz par leurs comportements symptotiques, nous avons à évaluer les intégrales de même type que :

$$E_1 = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

qui est l'exponentielle intégrale dont nous utilisons son comportement asymptotique.

$$E_1(z) = -\gamma \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n\,n} \qquad (|\arg z| < \pi)$$

d'où les termes en $\log \rho$ et γ.

(4) $$\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr$$

pour $\rho \to \infty$ remplaçons h_n et He et J_0 par leurs valeurs asymptotiques

$$\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr \simeq$$

$$\simeq \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{i\left(kr - \frac{n+1}{2}\pi\right)}}{kr} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{(\alpha+k)\sqrt{\alpha}} \frac{e^{i(k+\alpha)r}}{\sqrt{r}}\right] \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha}} \frac{e^{-i\left(\alpha r - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\alpha r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r}}\right] r\,dr$$

$$\simeq \frac{1}{\pi\alpha k(\alpha+k)} \left\{ e^{-i\frac{(n+1)\pi}{2}} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{2i(\alpha+k)r}}{r}\, dr + e^{-in\frac{\pi}{2}} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{2ikr}}{r}\, dr \right\}$$

$$\simeq \frac{1}{\pi\alpha k(\alpha+k)} \left\{ -i e^{-in\frac{\pi}{2}} E_1(-i2(k+\alpha)\rho) + e^{-in\frac{\pi}{2}} E_1(-2ik\rho) \right\}$$

$$\simeq \frac{1}{\pi\alpha k(\alpha+k)} \left\{ \frac{i e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{2i(k+\alpha)\rho}}{2i(k+\alpha)\rho} - \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{2ik\rho}}{2ik\rho} \right\}$$

donc $$\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr \simeq 0\ \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

(5) $$\int_{0}^{\rho} j_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr$$

écrivons cette intégrale sous la forme :

$$\int_0^{\rho} j_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r)\, r\,dr = \int_0^{\infty} \left(j_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r) - A \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right) r\,dr$$

$$- \int_{\rho}^{\infty} \left(j_n(kr)\, He\left(\frac{\alpha}{k}, kx\right) \Big|_r^{\infty} J_0(\alpha r) - A \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right) r\,dr + \int_0^{\rho} A \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r}\, dr$$

où $$A = -\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}$$

En remplaçant j_n et He et J_0 par leurs comportements asymptotiques, on peut écrire:

$$\int_0^\rho j_n(kr)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^\infty J_0(\alpha r)\,rdr \simeq \int_0^\infty \left[j_n(kr)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^\infty J_0(\alpha r) + \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha(k+\alpha)}\,\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{kr^2}\right] rdr$$

$$-\frac{1}{2\pi k\alpha(\alpha+k)}\int_\rho^\infty \frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}}e^{2i(k+\alpha)r}}{r} + \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}\pi}e^{2i\alpha r}}{r} + e^{-in\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2ikr}}{r}\,dr$$

$$-\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}\int_0^\rho \frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r}\,dr \simeq \int_0^\infty \left[j_n(kr)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^\infty J_0(\alpha r) + \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha(k+\alpha)k}\,\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right] rdr$$

$$-\frac{1}{2\pi\alpha k(k+\alpha)}\left\{-ie^{-in\frac{\pi}{2}}E_1(-2i(k+\alpha)\rho) + ie^{in\frac{\pi}{2}}E_1(-2i\alpha\rho) + e^{-in\frac{\pi}{2}}E_1(-2ik\rho)\right\} - \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(k+\alpha)}E_1\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

à l'aide du comportement asymptotique de E_1 on obtient :

$$\int_0^\rho j_n(kr)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^\infty J_0(\alpha r)\,rdr \simeq \int_0^\infty \left[j_n(kr)\,J_0(\alpha r)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^\infty + \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}\,\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right] rdr$$

$$-\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}\left[-\gamma+\log\rho\right] - \frac{1}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}\left[\frac{ie^{-in\frac{\pi}{2}}e^{2i(k+\alpha)\rho}}{2i(k+\alpha)\rho} - \frac{ie^{in\frac{\pi}{2}}e^{2i\alpha\rho}}{2i\alpha\rho} - \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{2ik\rho}}{2ik\rho}\right]$$

(6) $$\int_\rho^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,Je\left(\frac{\alpha}{k},kr\right)\,rdr$$

Remplaçons encore les fonctions j_n, H_0 et Je par leurs comportements asymptotiques et nous aboutissons tout calcul fait à :

$$\int_\rho^\infty j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,Je\left(\frac{\alpha}{k},kr\right)rdr \simeq$$

$$\simeq \left[\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\,\frac{e^{-i\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi}}{k}\int_0^\infty e^{ikt}\left(J_0(\alpha t) - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha}}\,\frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{t}}\right)dt\right]\left[\frac{e^{i(k+\alpha)\rho}}{(k+\alpha)\sqrt{\rho}}\right]$$

$$+ i\,\frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{2i(k+\alpha)\rho}}{2i(k+\alpha)\rho} + i\,\frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{2ik\rho}}{2k\rho}$$

En se rapportant à l'expression (15) nous avons à calculer :

$$(1')\quad h_n(k\rho)\int_0^{\rho} j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,rdr$$

$$(2')\quad j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,rdr$$

$$(3')\quad h_n(k\rho)\int_0^{\rho} H_0(\alpha r)\,Je\left(\frac{\alpha}{k},kr\right)j_n(kr)\,rdr$$

$$(4')\quad j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\,J_0(\alpha r)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^{\infty} rdr$$

$$(5')\quad h_n(k\rho)\int_0^{\rho} j_n(kr)\,J_0(\alpha r)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^{\infty} rdr$$

$$(6')\quad j_n(k\rho)\int_{\rho}^{\infty} h_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,Je\left(\frac{\alpha}{k},kr\right)\,rdr$$

Connaissant les expressions asymptotiques des intégrales (1 à 6) il suffit de remplacer j_n et h_n par leur comportement asymptotique et nous obtenons respectivement en ne conservant que les termes qui décroissent le moins vite à :

$$(1')\quad \simeq \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\left[\frac{e^{-i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{k}\int_0^{\infty} j_n(kr)\,H_0(\alpha r)\,rdr + 0\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\right)\right]$$

$$(2')\quad \simeq \frac{\cos(k\rho)}{\rho}\left[0\left(\frac{1}{\rho^{1/2}}\right)\right]$$

$$(3')\quad \simeq \frac{e^{ik\rho}}{\rho}\left[\int_0^{\infty}\left[j_n(kr)\,Je\left(\frac{\alpha}{k},kr\right)H_0(\alpha r) - \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{1}{r}}}{2\pi\alpha k(k-\alpha)r^2}\right]rdr + \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(k-\alpha)}(-\gamma+\log\rho)+0\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\frac{e^{-i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{k}$$

$$(4')\quad \simeq \frac{\cos k\rho}{\rho}\left[0\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

$$(5')\quad \simeq e^{\frac{ik\rho}{\rho}}\left\{\int_0^{\infty}\left[j_n(kr)\,J_0(\alpha r)\,He\left(\frac{\alpha}{k},kx\right)\Big|_r^{\infty} + \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}\,\frac{e^{-\frac{1}{r}}}{r^2}\right]rdr - \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2\pi\alpha k(\alpha+k)}(-\gamma+\log\rho)+0\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}\frac{e^{-i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{k}$$

$$(6')\quad \simeq \frac{\cos k\rho}{\rho}\left[0\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right)\right]$$

Les termes multipliés par γ ou $\log c$ disparaissent en tenant compte des relations existant entre les "a_j, b_j et α_j^2, b_j^2" et la somme de (3') et (5'). En ne conservant que les termes décroissants le plus lentement, on obtient facilement à partir de (15) l'expression de comportement asymptotique de Φ donné par (16).

- ANNEXE 2 -

Soit u, v et w respectivement la solution des équations intégro-différentielles (6), pour une plaque correspondant aux couplages (air, air), (eau, eau) et (air, eau)

$$(\Delta^2 - \lambda^4)\, u - 4i\omega^2\sigma \frac{e^{ikr}}{4\pi r} * u = \delta$$

$$(\Delta^2 - \lambda^4)\, v - 4i\omega^2\sigma' \frac{e^{ik'r}}{4\pi r} * v = \delta$$

$$(\Delta^2 - \lambda^4)\, \omega - 2i\omega^2(\sigma+\sigma') \frac{e^{i(k+k')r}}{4\pi r} * w = \delta$$

où nous désignons par σ et σ' les masses volumiques de l'air et l'eau divisé par D (rigidité de la plaque).

Les transformées de Fourier de u, v et w sont données par :

$$\hat{u} = \frac{1}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4) - \dfrac{4\omega^2\sigma}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4) - \dfrac{4\omega^2\sigma'}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2}}}$$

$$\hat{w} = \frac{1}{(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4) - \dfrac{2\omega^2\sigma}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}} - \dfrac{2\omega^2\sigma'}{\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2}}}$$

On voit facilement que l'approximation $\frac{u+v}{2} \simeq w$ nous amène à négliger sur la transformée de Fourier un terme d'ordre ξ^{-5} (pour $\xi \to \infty$) devant l'unité car :

$$\frac{\hat{u}+\hat{v}}{2} = \hat{w}\left\{1 + \frac{2\omega^2(\sigma\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2} - \sigma'\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}}{2\left[(16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2} - 4\omega^2\sigma\right]\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{2\omega^2(\sigma'\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2} - \sigma\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2}}{2\left[16\pi^4\xi^4 - \lambda^4)\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k'^2} - 4\omega^2\sigma'\sqrt{4\pi^2\xi^2 - k^2}\right.}\right\}$$

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] F.G. FAHY

"Statistic on acoustically induced vibration"
7ème C.I.A. Budapest 1971.

[2] D. FEIT

J.A.S.A., 40, 6, 1966, p. 1489-94.

[3] M.G. GOMPERTS

"Sound radiation of a thin infinite plate, excited by a harmonique line force, point force, or moment, near the critical frequency". 7ème C.I.A., Budapest, 1971.

[4] Von.M. HECKL

Acustica, vol. 19, 1967-68, p. 214-21
Acustica, vol. 10, 1960, p. 109
Acustica, vol. 9, 1959, p. 371
Acustica, vol. 13, 1963, p. 182

[5] V.T. LYAPUNOV

So . Phy. Ac, 14, 3, 1969, p. 352-55.

[6] Richard H. LYON

J.A.S.A., vol. 34, n° 9, septembre 1962.

[7] G. MAIDANIK

J.S.V. ,(1966) 3 (3), p. 288-99.

[8] G. MAIDANIK and E.M. KERWIN

J.A.S.A., vol. 40, n° 5, 1966, p. 1034-38.

[9] Philip M. MORSE

J.A.S.A., vol. 40, n° 2, 1966, p. 354-66.

[10] P. Ranganath NAYAK

J.A.S.A., vol. 47, n° 1, (2ème partie) 1970, p. 191-201.

[11] Nicholas ROMILLY

J.A.S.A., vol. 36, n° 6, 1964, p. 1104-109.

[12] R. SOLESKI

Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences,
Série des Sciences et Techniques, vol. 14, n° 11-12, 1966

[13] William THOMPSON and J.V. RATTAYYA

J.A.S.A., vol. 36, n° 8, 1964, p. 1488-90.

[14] D.H.Y. YEN, C.C. CHOU

Journal of Applied Mechanics, décembre 1971, p. 1050-54.

[15] James E. YOUNG

J.A.S.A, vol. 26, n° 4, 1954, p. 485-492.

[16] Von INGARD

J.A.S.A., 26. 99-101, 1954.

[17] P. FILIPPI et H. SAADAT

"Un problème de couplage entre les vibrations d'une plaque mince et un champ acoustique dans un fluide". 7ème C.I.A., Budapest 1971.

[18] P. FILIPPI et H. SAADAT

Acustica, vol. 26, n° 6, 1972 (à paraître).

[19] P. FILIPPI et H. SAADAT

Compte Rendu Acad. Sc. , tome 274, février 1972.

[20] J. VIVOLI

"Mise en équation et conditions aux limites pour les problèmes de plaque". 7ème C.I.A., Budapest 1971.

[21] P. FILIPPI et J. VIVOLI

"Vibrations de plaques minces; résolution à l'aide de potentiels de couches". 7ème C.I.A., Budapest 1971.

[22] F. SPRONCK

"Transparence au son de parois viscoélastiques finies et infinies, simples et multiples". Thèse de 3ème Cycle. Centre de Recherches Physiques 1971.

[23] M. BRODUT

Contribution à l'étude de la transparence acoustique de structures planes à trois couches. Thèse de 3ème Cycle. Centre de Recherches Physiques, Marseille. 1971.

[24] Th. VOGEL

Sur les vibrations de certains systèmes élastiques dans un champ sonore. Première Thèse, Marseille 1947.

[25] E. DURAND

Solutions numériques des équations algébriques
Masson et Cie, Tomes 1, 2.

[26] L. SCHWARTZ

"Théorie des distributions"
Heramann, Paris 1966.

[27] J.G. PETIAU

"La théorie des fonctions de Bessel"
C.N.R.S., Paris, 1955.

[28] L. SCHWARZ

Luftahrtforschung, 20, 1944, p. 341-71.

[29] Y. LUKE

"Intégrales of Bessel functions". Mc Graw-Hill, 1961.

[30] D.G. CRIGHTON

J.S.V., 20 (2), 1972, p. 209-218.

[31] F.M. MORSE et H. FESHBACH

"Methods of theorical physics". Mc Graw-Hill, 1953.

[32] V.V. GRUSIN

Amer. Math. Soc. Transl., 51, 1966, p. 82-112.

[33] M. ABRAMOVITZ et I.A. STEGUN

"Handbook of mathématical functions"
National Bureau of Standards.

[34] L. CREMER et M. HECKL

Körperschall, Springer-Verlag, 1967.

Vu et permis d'imprimer

Marseille, le

Le Président,

F. BOREL.